Департамент внутренней и кадровой политики
Белгородской области
Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
«Валуйский колледж»

Методические рекомендации по организации и выполнению практических заданий

Математическое моделирование

(МДК, УД)

Специальность

09.02.07 Информационные системы и программирование

Рассмотрено на заседании ПЦК предметно-цикловой комиссией математических дисциплин и информационных технологий, протокол

№ 1 от «31» августа 2020 г.

Руководитель: И. В. Крапивина

Методические рекомендации для проведения практических работ студентов по учебной дисциплине Математическое моделирование специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование

Составитель: Дуракова Т.М., преподаватель

Пояснительная записка

К основным видам учебных занятий наряду с другими (урок, лекция, семинар, контрольная, лабораторная работа, консультация, практика, курсовая работа) относится практическое занятие, которое направлено на формирование учебных и профессиональных практических умений.

Состав и содержание практического занятия определяется его ведущей дидактической целью: формирование практических умений:

- профессиональных (выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности);
- учебных, необходимых в последующей учебной деятельности.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки студентов. Методические рекомендации предназначены для студентов второго курса многопрофильного отделения специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование Практические занятия в среднем профессиональном образовании являются специфическим педагогическим средством организации и управления деятельностью студентов в учебном процессе.

Практическая работа студентов по учебной дисциплине Математическое моделирование проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

В данных рекомендациях содержатся планы практических занятий с указанием целей, задач, самостоятельных работ, контрольных работ.

Тема № 1. Введение в математическое моделирование

Основные понятия: моделирование, модель, оригинал, изоморфная модель, гомоморфная модель. *Моделирование* – это исследование явлений, процессов, систем или объектов путем построения и изучения их моделей и использования последних для определения или уточнения характеристик и рациональных способов построения вновь конструируемых технологических процессов, систем и объектов.

Все модели можно разделить на *вещественные (физические) и идеальные* (наглядные, знаковые, математические). Ряд наглядных моделей составляют *схемы, карты, чертежи и графики*; ряд знаковых – *символы, алфавит, графовая запись и сетевое представление* изучаемых процессов или объектов.

Математическая модель – это приближенное, выраженное в математических терминах предс тавление процессов, систем и объектов, с помощью которого устанавливают абстрактные связи между компонентами реального процесса системы или объекта. Известны *аналитические, имитационные, численные, функциональные и матричные* математические модели. Любая из перечисленных моделей может быть классифицирована: по поведению во времени (динамическая, статическая, квазистатическая); по виду входной информации (детерминированная, стохастическая, непрерывная, дискретная); по типу используемого математического аппарата (линейная, нелинейная, оптимизационная, неоптимизационная).

Достоверность – форма существования истины, обоснованной количественным способом (например, экспериментом, логическим доказательством) для познающего субъекта.

При математическом моделировании достовернос ть результатов – важный показатель эффективности модели. Достоверность результатов моделирования оценивается путем различия процедур сопоставления модельных заключений, оценок, следствий и выводов с реально наблюдаемой действительнос тью. Саму процедуру оценки достоверности результатов моделирования называют *анализом адекватности (соответствия) модели ее моделируемому объекту, системе или процессу.*

Адекватность – это в какой-то мере условное понятие, так как полного соответс твия модели реальному объекту быть не может: иначе это была бы не модель, а сам объект. При моделировании имеется в виду не адекватнос ть вообще, а адекватность тем свойствам модели, которые для исследования считаются существенными.

Проблема адекватности имеет особое значение для имитационных моделей. Их логические элементы должны соответствовать логически элементам реальной системы. Математический аппарат должен представлять реализуемые ими функ ции, а вероятнос тные характеристики – отражать вероятностный характер реальной системы.

Оценка адекватности имитационной модели слагается из двух частей – из оценки адекватности принципиальной структуры модели, т. е. ее замысла и оценки достоверности ее реализации.

Моделирование – творческий процесс, но тем не менее существует алгоритм, т. е. определенный набор шагов (этапов) при разработке математической модели. Укрупненно процесс моделирования можно разбить на перечисленные ниже этапы.

На *первом этапе* определяют конечные цели моделирования, набор факторов и показателей, взаимосвязь между ними и их роль в рамках поставленной задачи: какие из них можно считать входными, а какие – выходными.

На *втором этапе* приступают к постулированию, математической формализации и, если возможно, к экспериментальной проверке исходных допущений. Если принимаемые допущения не могут быть проверены

экспериментально, то их подкрепляют известными теоретическими рассуждениями о механизме, природе и качественном характере «физики» исследуемого процесса или объекта. Второй этап называют этапом анализа априорной информации.

Третий этап называют собственно моделирующим. Он включает в себя непосредственный вывод общего вида модельных соотношений, связывающих входные и выходные параметры между собой. Следует подчеркнуть, что на данном этапе определяется лишь структура модели, в которой, наряду с известными числовыми значениями, будут присутс твовать величины, физический смысл которых определен, а числовые значения – нет.

На *четвертом этапе* моделирования (статис тический анализ модели) с помощью методов статистической обработки данных решают задачу наилучшего подбора неизвестных параметров, входящих в аналитическую запись модели, и исследования свойств полученных оценок.

Пятый этап посвящен процедуре сопоставления модельных значений с реально наблюдаемой действительностью. Это этап статистического анализа адекватности модели.

На *шестом этапе* планируют и проводят исследования, направленные на уточнение модели, т. е. на дальнейшее развитие и углубление в торого этапа, который в определенной мере является ключевым. Необходимость шестого этапа зависит от результатов пятого.

Таким образом, моделирование требует серьезной подготовки и переработки большого объема информации, сочетает в себе трудоемкость и неопределенность, что говорит о стохастическом (вероятностном) характере всех достаточно серьезных математических моделей.

Тема № 2. Основные понятия теории множеств

Эта тема посвящена основным понятиям теории множеств. *Множеством* называется совокупность определенных, вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое. Отдельные объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества*. Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок, внутри которых перечисляются элементы множества.

При изучении темы № 2 следует иметь в виду, что множества бываю т конечные и бесконечные, следует изучить их определения и способы задания (представления) для обеспечения возможности оперировать с конкретными множествами. Чтобы иметь возможность осуществлять какие-либо действия над множествами, необходимо уметь их сравнивать, поэтому важно дать понятие подмножества, описать его свойства и решить задачу определения наименьшего и наибольшего элементов (нижней и верхней границы) множества.

Кроме того, необходимо рассмотреть основные операции над множествами: объединение, пересечение, разность и др.

Объединением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат либо множес тву X, либо множеству Y.

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству X, и множеству Y.

Разностью множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству X и не принадлежат множеству Y.

Множество I, играющее роль единицы в алгебре множеств, называется *универсальным* (единичным), если оно содержит все элементы множества X, так что любое множество X полностью содержится в множестве I.

Множество $\overline{X}$, являющееся разностью множеств I и X, называется *дополнением* множества X (до универсального множества I).

Система множества X называется *разбиением* множества Y, если любое множество X_n из системы X является подмножеством Y и любые два множества X_n являются непересекающимися.

При рассмотрении приведенных выше операций над множествами необходимо предс тавить формальное определение, пример операции над парой множеств и графическое пояснение сути операции на диаграмме Эйлера – Венна (см. рис. 1).

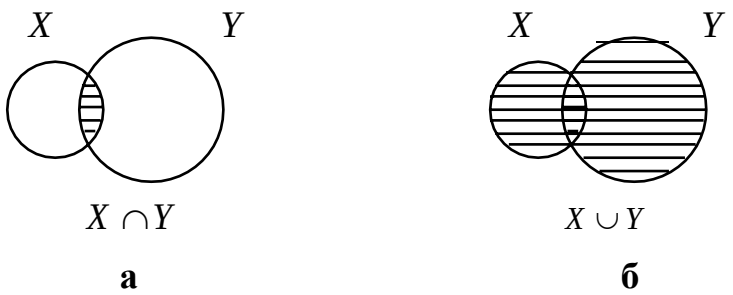


Рис. 1. Пересечение (а) и объединение (б) множеств

Далее при раскрытии данной темы необходимо аналитическим путем и с графическими пояснениями доказать следующие тождес тва алгебры множеств.

Пересечение множес тва Z с объединением множеств X и Y есть объединение пересечений Z с X и Z с Y.

Объединение множества Z с пересечением множеств X и Y есть пересечение объединений Z с X и Z с Y.

Если множество X принадлежит множеству Y (при X меньше Y), то пересечение их есть множество X, а объединение – множество Y.

Дополнение объединений двух множеств есть пересечение дополнений этих множеств.

Дополнение пересечений двух множеств есть объединение дополнений этих множеств.

При раскрытии темы наряду с понятием множества как совокупности элементов необходимо раскрыть важное понятие упорядоченного множес тва, или кортежа. *Кортежем* называется последовательнос ть элементов, т. е. совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место и, в отличие от обычного множества, эта совокупность может иметь одинаковые элементы.

При написании контрольной работы по данной теме необходимо привести примеры, графическое пояснение (если это возможно) и четкие определения таких понятий, как прямое произведение множеств, соответствие, отображение и отношение.

Тема № 3. Основы теории графов

Раскрывая тему, содержащую основы теории графов, необходимо представить граф как некоторое множество точек плоскости X, называемых *вершинами*, и множество направленных отрезков U, соединяющих все или некоторые из вершин и называемых *дугами* (рис. 2, а). Математически граф G можно определить как пару множеств X и U: G = (X, U).

Иногда бывает удобно дать графу другое определение. Можно считать, что множество направленных дуг U, соединяющих элементы множества X, отображает это множество само в себя. Поэтому можно считать граф заданным, если дано множество его вершин X и способ отображения Г множества X в X. Таким образом, граф G есть пара (X, Г), состоящая из множества X и отображения Г, заданного на этом множестве: G = (X, Г).

Далее необходимо на конкретном примере показать, что такое определение графа совпадает с определением отношения на множестве и появляется возможность предс тавления графа в виде матриц смежности и инциденций (рис. 3, 4). Следует пояснить, что две вершины графа x и y являются смежными, если они различны и если существует дуга u, идущая из x в y; дуга u называется *инцидентной* вершине x, если она заходит в эту вершину или выходит из нее.

Любой граф G=(x, y) с m вершинами может быть представлен матрицей смежности размера $m \times m$ при условии, что вершинам графа приписаны некоторые (произвольные) метки. Если вершины графа помечены метками x_1, x_2, …x_n, то матрица смежности A(G) определяется следующим образом:

$$A(G) = [a_{ij}],$$

где $a_{ij} = 1$, если имеется дуга, соединяющая вершину x_i с вершиной x_j;

$a_{ij} = 0$, – в противном случае.

В качестве примера приведем граф и матрицу его смежности для оценки геометрической структуры детали (рис. 3).

Второй метод представления графа использует матрицу инцидентности

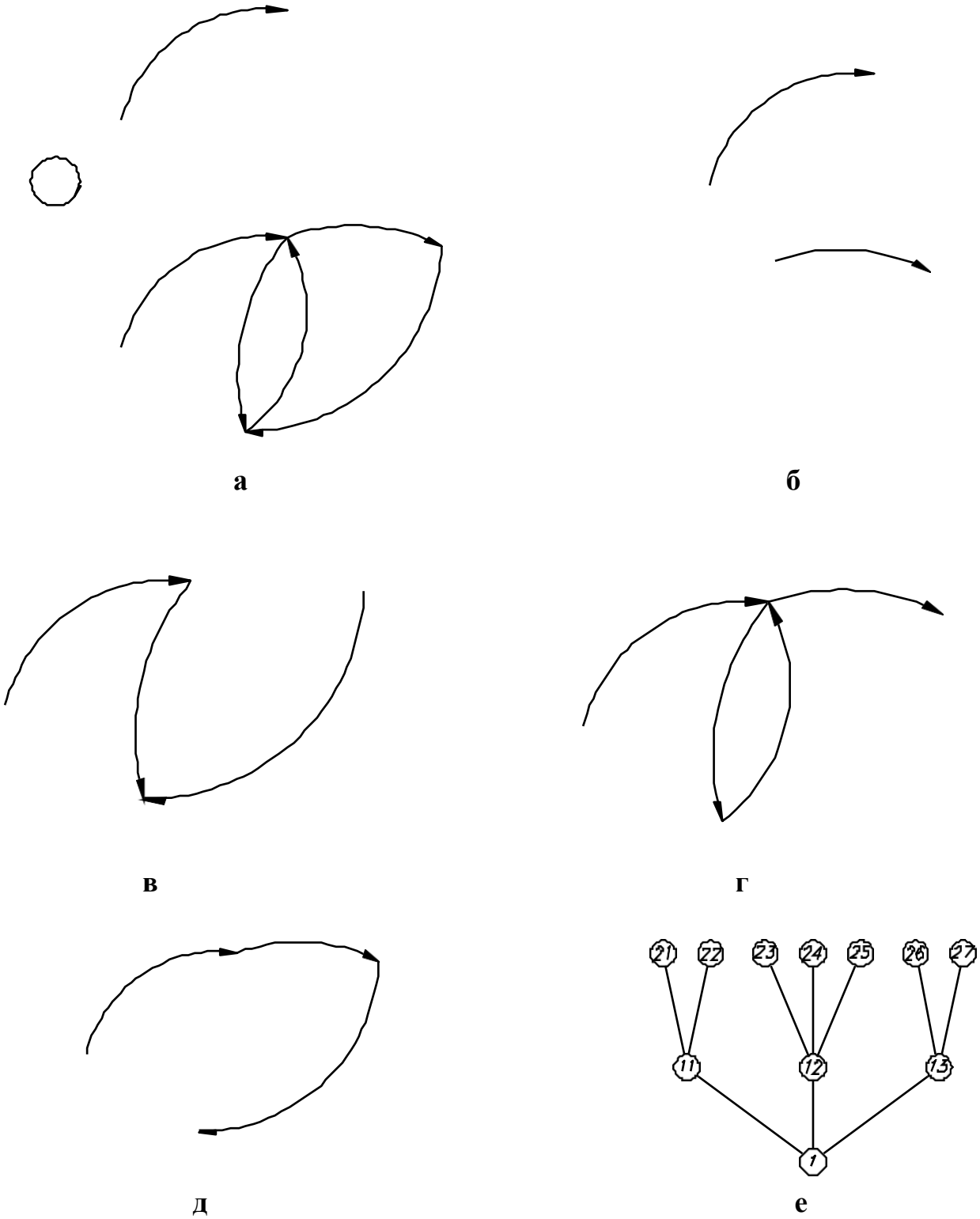
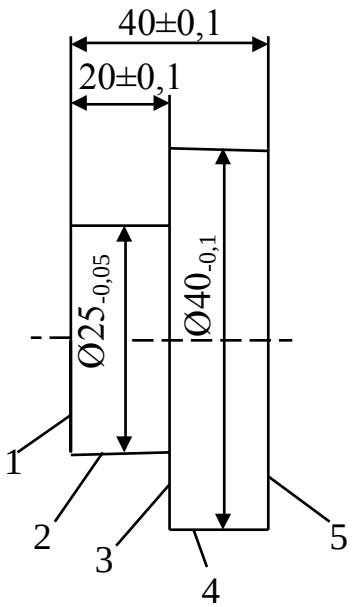


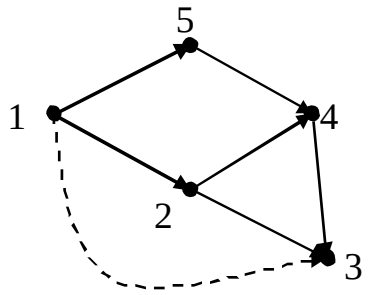
Рис. 2. Примеры представления элементов графа: общий вид графа (а); подграф (б); частичный граф (в); простой путь в графе (г); элементарный путь в графе (д); дерево (е)

Матрица инцидентности порядка $m \times n$ определяется следующим образом: $B(G) = [b_{ij}]$,

где $i = 1 \ldots m$ – количество вершин графа, $j = 1 \ldots n$ – количество дуг графа,

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, \text{если дуга } u_i \text{ исходит из } x_i; \\ -1, \text{если дуга } u_i \text{ заходит в } x_i; \\ 0, \text{если дуга } u_i \text{ не инцидентна } x_i. \end{cases}$$

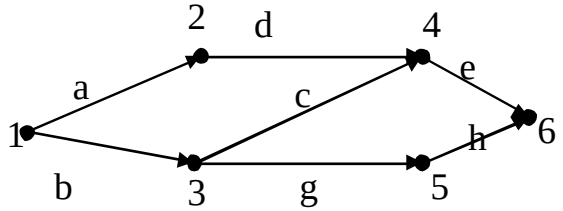




$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Рис. 3. Граф и матрица смежности геометрической структуры детали

Далее для примера приведем граф и матрицу инциденций для маршрутного ТП (рис. 4). Буквами обозначен порядок выполнения операций.



$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & g & h \\ \hline 1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Рис. 4. Граф и матрица инциденций для маршрутного ТП

Матрицы инциденций в описанном виде применимы только к графам без петель. В случае наличия в графе петель эту матрицу следует расчленить на две

полуматрицы: положительную и отрицательную.

Чтобы окончательно определиться с понятием «граф», необходимо освоить ряд определений.

Подграфом G_A графа G называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество A вместе с дугами, соединяющ ими эти вершины (рис. 2, б).

Частичным графом G_A по отношению к графу G называется граф, содержащий только часть дуг графа G (рис. 2, в).

Следует помнить, что при ответе на этот вопрос необходимо давать математическую интерпретацию определений с графическим пояснением.

Помимо дуг и, другими важными понятиями являются понятия пути и контура. *Путем* в графе называется такая последовательнос ть дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь может быть конечным и бесконечным. *Путь*, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется *простым* (рис. 2, г). *Путь*, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется *элементарным* (рис. 2, д). *Контур* – это конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной ((c, e), (e, d), (d, c) на рис. 2, а). *Контур* называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают). *Контур единичной длины*, образованный дугой вида (a, a), называется *петлей* (см. рис. 2, а).

Иногда граф рассматривают без учета ориентации его дуг. В этом случае его называют *неориентированным* и для него понятия «дуга», «путь» и «контур» заменяются понятиями «ребро», «цепь», «цикл». *Ребро* – это отрезок, соединяющий две вершины. *Цепь* – это последовательность ребер, а *циклом* называют конечную цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают.

Частным случаем неориентированного графа является *дерево* – конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов (рис. 2, е).

Граф дает удобное геометрическое представление отношений на множестве, поэтому теория графов и теория отношений на множестве взаимно дополняют друг друга. Если для любых двух вершин x и y, удовлетворяющих условию $x \neq y$, существует путь из x в y, то считают, что на графе $G = (X, \Gamma)$ введено отношение порядка. Кроме того, вершины, лежащие на одном контуре, являются эквивалентными, т. е. на графе вводится отношение эквивалентности. Отношение порядка и отношение эквивалентности отражают на графе свойства рефлексивности, транзитивнос ти и антисимметричности.

В практических приложениях имеет большое значение задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами связного неориентированного графа. Каждому ребру такого графа приписано некоторое число $\lambda(u) \geq 0$, которое может быть расстоянием между объектами, временем, стоимостью перевозки груза по этому ребру и т. п. Иногда приходится иметь дело с графами, ребра которых имеют одинаковую длину, принимаемую за единицу. Вершины такого графа представляют собой состояния некоторой системы, в которой все переходы, делаемые за один шаг, эквивалентны.

Общее правило для нахождения кратчайшего пути в графе с ребрами единичной длины состоит в том, что каждой вершине x_i приписывают индекс λ_i, равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную. Приписывание индексов вершинам производится в следующем порядке.

1. Конечной вершине x_0 приписывают индекс 0.

2. Всем вершинам, из которых идет ребро в конечную вершину, приписывают индекс 1.

3. Всем вершинам, еще не имеющим индексов, из которых идет ребро в вершину с индексом λ_i, приписывают индекс λ_{i+1}. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина. По окончании разметки индекс у начальной вершины будет равен длине кратчайшего пути. Сам кратчайший путь находят, двигаясь из начальной вершины в направлении убывания индексов.

Задача приписывания вершинам графа числовых индексов усложняется, если ребра графа имеют произвольную длину. Усложнение вызвано тем, что в сложном графе путь, проходящий через наименьшее число вершин, зачастую имеет большую длину, чем некоторые обходные пути. Процесс приписывания индексов для такого вида графов заключается в следующем.

1. Каждую вершину x_i помечают индексом λ_i. Первоначально конечной вершине x_0 приписывают индекс $\lambda_0 = 0$. Для остальных вершин предварительно полагают $\lambda_i = \infty$ $(i \neq 0)$.

2. Находят такую дугу (x_i, x_j), для которой $\lambda_j - \lambda_i > \lambda(x_i, x_j)$, и заменяют индекс λ_j индексом $\lambda'_j = \lambda_i + \lambda(x_i, x_j) < \lambda_j$. Продолжают этот процесс замены индексов до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_j.

Большое практическое значение имеет задача о пос троении графа наименьшей длины (например, миним изация расстояния, проходимого тележкой с заготовками, или общей длины автомобильных дорог, соединяющих населенные пунк ты, и др.). Граф соединения n вершин всегда является деревом. Следовательно, для соединения n вершин нужно построить (n – 1) ребер.

Граф наименьшей длины можно пос троить по следующему прав илу: прежде всего соединяют две вершины с наиболее коротким соединяющим ребром u_1. На каждом из следующих шагов добавляют самое короткое из ребер u_i, при присоединении которого к уже имеющимся ребрам не образуется цикл. Если имеется несколько ребер одинаковой длины, выбирают любое из них. Каждое дерево, пос троенное таким образом, называют *экономическим*, и длина его равна сумме длин отдельных ребер.

Тема № 4. Оптимизация производственныхи технологических систем

В этой теме рассматриваются основы оптимизации производственных и технологических систем. Системой называют любой объект, существующий во времени, подвергающийся внутренним или внешним воздействиям, реагирующий на них изменением своих состояний и обладающий способностью проявлять в том или ином виде эти реакции.

Таким образом, система определена, если заданы:

а) множество T моментов времени t, множество B допус тимых воздействий b, множество Q возможных состояний q, множество R ожидаемых реакций r;

б) переходная функция, представленная теми состояниями $q \in Q$, в которых оказывается система в момент времени $t \in T$, если в начальный момент $t_0 \in T$ она была в состоянии $q_0 \in Q$ и на нее действовало возмущение $b_0 \in B$;

в) отношение, связывающее в каждый момент времени $t \in T$ реакции $r \in R$ с состоянием $q \in Q$.

Основной задачей исследования производственных и технолог ических систем является задача поиска в рамках принятой модели таких решений, которым отвечают экстремальные значения критерия эффективности. Следовательно, задача проектирования таких систем связана с необходимостью поиска оптимальных решений. Оптимизация – это процесс нахождения экстремума функции или процесс приведения системы в оптимальное (наилучшее) состояние, т. е. это либо факт принятия оптимального решения, либо процесс выполнения этого решения.

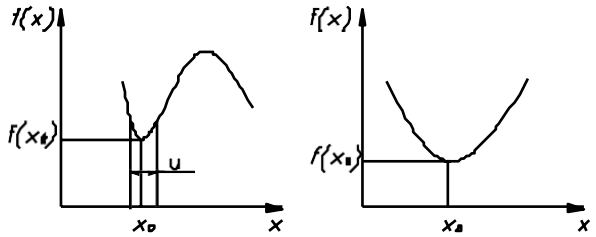
Постановка задачи оптимизации содержит множес тво допустимых решений X и числовую функцию f, определенную на множестве X, называемую целевой функ цией (а также критерием оптимальности или критерием качества). Задача оптимизации заключается в выборе среди элементов множества X такого решения, которое было бы с определенной точки зрения наиболее предпочтительным. Сравнение решений по предпочтительности осуществляется с помощью целевой функции по двум вариантам сравнения произвольной пары решений.

В теории оптимизации рассматривают два вида оптимума: локальный и глобальный. Точка $x_0 \in X$ доставляет функции f на множес тве X локальный минимум, если существует такая окрестность U точки x_0, что неравенство $f(x_0) < f(x)$ справедливо для всех $x \in U$ (рис. 5, а). Глобальный минимум функции f доставляет точка $x_0 \in X$, для которой неравенство $f(x_0) < f(x)$ выполняется для всех $x \in X$ (рис. 5, б). Аналогично определяются точки локального и глобального максимума.

В теории оптимизации иногда удобно рассматривать более общую задачу оптимизации, в которой понятие решения определяется таким образом, что оно всегда существует. Для того чтобы сформулировать эту обобщенную задачу,

необходимо дать определение точной нижней грани и точной верхней грани.

В обобщенной задаче оптимизации под решением понимают не отдельную точку, а последовательность точек $\{x_к\}_{к=1}^{\infty}$, $x_к \in X$, такую, что $\lim f(x_к) = f_0$. Эта последовательность всегда существует и называется *минимизирующей последовательностью.*



а **б**

Рис. 5. Минимумы функции: локальный (а); глобальный (б)

Согласно существующей классификации все задачи оптимизации можно разделить на задачи минимизации с ограничениями и без ограничений, максимизации с ограничениями и без ограничений, математического программирования, выпуклого и геометрического программирования. Основными задачами являются задачи минимизации и максимизации, причем задачи одного класса довольно легко сводятся к задачам другого.

2. 2. 5. Тема № 5. Линейное программирование

В этой теме рассматриваются основы линейного программирования – области математического программирования, посвященной теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными.

Линейное программирование возникло в связи с задачами нахождения наивыгоднейш их вариантов при решении различных производственных задач. В этих задачах имеется большая свобода изменения различных параметров и ряд ограничивающих условий. Требуется найти такие значения параметров, которые (с определенной точки зрения) были бы наилучшими. К таким задачам относятся задачи нахождения наиболее рационального способа использования сырья и материалов, определения наивыгоднейш их режимов выполнения технологических процессов (ТП), повышения эффективнос ти работы межцехового и внутрицехового транспорта и др.

В самом общем виде задачу линейного программирования можно записать следующим образом.

Даны ограничения типа:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i & \left(i = \overline{1, m_1}\right); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i & \left(i = \overline{m_1 + 1, m_2}\right); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i & \left(i = \overline{m_2 + 1, m}\right). \end{cases}$$

Или, в так называемой канонической форме, к которой можно привести все три указанных случая:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases}$$

Требуется найти такие неотрицательные числа $x_j \left(j = \overline{1, n}\right)$, которые минимизируют целевую функцию

$$q = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min,$$

часто называемую линейной формой. Если необходимо максимизировать целевую функцию (например, обеспечить максимальную прибыль при производстве продукции), то ее обозначают q'.

Неотрицательность искомых чисел записывают в виде

$$x_j \ge 0.$$

Характерной особеннос тью данной задачи является то, что число уравнений меньше числа неизвестных, т. е. $m < n$.

Суть задачи линейного программирования состоит в том, чтобы из множества допус тимых решений системы выбрать только одно, которое обращает в минимум линейную форму (целевую функцию). При этом *допустимым решением* называют любое решение системы с неотрицательными значениями переменных ($x_j \ge 0$).

Чаще всего в задаче линейного программирования все или некоторые из уравнений имеют вид неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Однако такие неравенства можно легко превратить в уравнения, вводя добавочную переменную x_{n+j} так, чтобы в зависимости от знака неравенства имело место одно из двух выражений:

$$a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in} \cdot x_n + x_{n+j} = b_i;$$

$$a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in} \cdot x_n - x_{n+j} = b_i.$$

Решение системы уравнений, в которой число переменных n больше числа уравнений m, можно найти, если n – m каких-либо переменных положить равными нулю. Тогда полученную при этом систему m уравнений с n неизвестными можно решить обычными методами алгебры. Найденное при этом решение называют *базисным*. *Базисом* называют любой набор переменных m, таких, что определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных, не равен нулю.

Эти m переменных называют *базисными переменными*. Остальные n – m переменных называют *свободными переменными*. Если принять все свободные переменные равными нулю и решить полученную систему m уравнений с n неизвестными, то получим базисное решение. Однако среди базисных решений будут такие, которые дадут отрицательные значения некоторых базисных переменных, что противоречит условию задачи, поэтому такие решения недопус тимы. Кроме того, при нахождении минимального (максимального) значения целевой функ ции необходимо из допустимых базисных решений выбрать такое, которое обращает функцию в минимум (максимум).

В нас тоящее время разработаны рациональные способы перебора базисных решений, которые позволяют рассматривать не все допустимые базисные решения, а их минимальное число. Наиболее распространенными методами такого перебора являются так называемый симплекс-метод и табличный метод.

Суть симплекс-метода состоит в следующем:

1. Находят какое-либо допустимое базисное решение. Его можно найти, приняв какие-либо m – n переменные за свободные, приравняв их к нулю и решив получившуюся систему уравнений. Если при этом некоторые из базисных переменных окажутся отрицательными, то нужно выбрать другие свободные переменные, т. е. перейти к новому базису.

2. Проверяют, не дос тиг нут ли уже максимум целевой функ ции при найденном допустимом базисном решении.

3. Если оптимальное решение не найдено, то ищут новое допустимое базисное решение, но не любое, а такое, которое увеличивает значение целевой функции.

Проверку того, достиг нут ли при найденном допустимом решении максимум целевой функции, можно сделать путем поиска нового базисного решения. Для перехода к новому базисному решению одну из свободных переменных следует сделать базисной, при этом она станет отличной от нуля, т. е. возрастет. Следовательно, если какая-либо из свободных переменных входит в выражение для целевой функ ции со знаком «+» и при ее увеличении целевая функция увеличивается, то максимум целевой функции не достигнут, и данную переменную следует превратить в базисную, сделав ее отличной от

нуля. Однако при возрастании свободной переменной некоторые из базисных переменных будут уменьшаться. Поскольку отрицательные значения переменных недопус тимы, то в качестве новой свободной переменной следует принять ту из базисных переменных, которая раньше других обращается в ноль.

При пользовании табличным методом удобно ввести специальную форму записи уравнений и целевой функции. Обозначим через $x_i'\left(i=\overline{1,m}\right)$ базисные переменные, а через $x'_j\left(j=\overline{1,n-m}\right)$ свободные переменные. Выразив целевую функцию и базисные переменные через свободные переменные, сформулируем задачу линейного программирования в следующем виде: максимизировать

$$q'=-q=a_{oo}-\sum_{j=1}^{n-m}c_j\cdot x'_j$$

при условии

$$x'_i=a_{io}-\sum_{j=1}^{n-m}a_{ij}\cdot x'_j \quad \left(i=\underline{1,m};\ x'_i\geq 0;\ x'_j\geq 0\right).$$

При такой форме записи задача может быть представлена матрицей коэффициентов при свободных переменных, представленной в табл. 3.

Таблица 3

Матрица коэффициентов при свободных переменных

	0	$-x_1'$	$-x_2'$	…	$-x'_{n-m}$
q'	a_{00}	a_{01}	a_{02}	…	$a_{0(n-m)}$
x_1'	a_{10}	a_{11}	a_{12}	…	$a_{1(n-m)}$
…	…	…	…	…	…
x'_m	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	…	$a_{m(n-m)}$

По виду коэффициентов матрицы (см. табл. 3) легко судить, является ли найденное базисное решение допус тимым и, если оно допус тимо, то будет ли оно оптимальным. Действительно, замечая, что столбец коэффициентов a_{i0} ($i \neq 0$) предс тавляет собой базисное решение, соответс твующее базису $x_1',...,x'_m$, а строчка коэффициентов a_{0j} ($j \neq 0$) представляет собой взятые с обратным знаком коэффициенты при свободных переменных, приходим к выводу, что базисное решение, соответс твующее базису $x_1',...,x'_m$, допустимо, если $a_{i0} \geq 0$. Если, кроме того, $a_{0j} \geq 0$, то это базисное решение является оптимальным. Очевидно также, что при оптимальном базисном решении коэффициент a_{00} дает значение q'_{max}.

Следовательно, решение задачи линейного программирования табличным методом заключается в нахождении на первом этапе какого-либо допустимого

базисного решения, которое в общем случае не является оптимальным, и преобразовании первоначальной матрицы коэффициентов с целью перехода к лучшему базисному решению.

Для более полного представления о задаче линейного программирования дают ее геометрическую интерпретацию. Проводят геометрическое построение прямых или плоскостей (в зависимости от числа уравнений и неизвестных), соответс твующих каждому уравнению системы, вершины образовавшейся фигуры будут соответс твовать набору допустимых базисных решений.

Тема № 6. Теория расписаний

Теория расписаний, рассматриваемая в этой теме, предс тавляет собой единую научную дисциплину, изучающую распределительные задачи, в которых ограничительным ресурсом является время.

Возникновение и последующее развитие теории расписаний характеризовалось попытками изучить широкий круг задач, начиная с простейшей задачи выбора очередности выполнения N работ одним исполнителем и кончая так называемой общей задачей, связанной с выбором оптимальной последовательности выполнения заданного набора работ на имеющемся комплекте оборудования.

Однако применительно к задачам краткосрочного планирования загрузки оборудования методы теории расписаний представляют собой, в основном, чисто теоретический интерес. Практическое применение они стали получать с появлением и развитием гибких производственных систем (ГПС).

Классической формулировкой задачи краткосрочного планирования считается следующее: необходимо изготовить L различных деталей, заготовки которых долж ны быть обработаны на К станках при заданных временах обработки на каждом станке t_j (l = l, L; K = l, K). Требуется определить порядок запуска заготовок на станки так, чтобы общее время, необходимое для выпуска всех деталей, было минимальным.

В общем случае задача краткосрочного планирования может быть сведена к задачам целочисленного программирования, но их решение связано с большими трудностями из-за отсутствия эффективных алгоритмов решения задач целочисленного программирования. Более удачным выглядит применение для этих целей методов теории расписаний: метода полного перебора вариантов, «метод ветвей и границ» и эврис тических решающих правил – прав ила кратчайшей операции, правила максимальной или минимальной остаточной трудоемкости, правила вырав нивания загрузки станков и смешанных решающих правил. Использование методов теории расписаний для планирования работы ГПС позволяет значительно упростить алгоритмы составления оптимальных расписаний и сократить сроки подготовки производства. Таким образом, лишь в ГПС имеет мес то практический подход к

оптимизации краткосрочного планирования.

В зависимости от целей создания ГПС и сложившейся на момент планирования производственной ситуации в ходе планирования решают разнообразные задачи: соблюдение директив но заданных сроков изготовления деталей, изготовление набора деталей за минимальное время, обеспечение комплектного выпуска деталей и др.

В общем случае расписанием можно назвать документ, содержащий сведения: о количестве и номенклатуре выполняемых работ, включая их этапы (портфель работ); о моментах начала и окончания каждой работы; о затратах времени и материальных ресурсов на все проводимые работы; о месте и технических средствах выполнения каждой работы.

Этих сведений дос таточно для формального представления расписаний, хотя на практике они могут дополняться и уточняться в интересах более полного учета той реальной картины, которая отражена в модели.

Расписание можно задавать различными способами, среди которых наиболее наглядным является геометрический, основанный на использовании диаграммы Гантта (или Гантт-карты): каждой работе ставится в соответс твие отрезок определенной длины, каждому типу оборудования – прямая линия (ось времени), вдоль которой размещают отрезки – работы, выполняемые на этом оборудовании. Цифры над отрезками означают номера операций, которые состоят из порядкового номера детали и порядкового номера станка. При известном начале отсчета времени $t = 0$ взаимное расположение отрезков дает всю необходимую информацию.

Анализ возможных вариантов расписаний показывает, что в оптимальном расписании необходимо как- то совместить два требования. С одной с тороны, в начало расписания желательно включить заготовки деталей с минимальным временем обработки на первом станке p_j для того, чтобы максимально быстрее загрузить работой второй станок. С другой стороны, для сокращения простоев второго станка целесообразно загружать его в первую очередь заготовками с максимальным временем обработки q_j. Второе требование оправдано и потому, что при его соблюдении в конец расписания будут отнесены детали (заготовки) с минимальным значением q_j, а это в некоторой степени сокращает время работы второго станка после завершения работ первым станком.

Учитывая оба вышеуказанных требования, можно предс тавить последовательность составления оптимального расписания работы двух станков в следующем виде.

1. Разбить комплект деталей на две группы: в первую группу включить детали, для которых $p_j \leq q_j$, во вторую – детали, для которых $p_j > q_j$.

2. Включить в расписание работы первого станка заготовки деталей первой группы, предварительно упорядочив их по возрастанию p_j.

3. Включить в расписание работы первого станка заготовки деталей второй группы, предварительно упорядочив их по убыванию q_j.

4. Сохранить на втором станке ту же последовательность обработки, что и на первом станке.

Расписание изготовления восьми деталей на двух станках (табл. 4), составленное по рассмотренному выше правилу, приведено на рис. 6.

Разобьем все детали на две группы:

- первая группа ($p_j \le q_j$): 1, 4, 6, 8;
- вторая группа ($p_j > q_j$): 2, 3, 5, 7.

Таблица 4

Трудоемкость изготовления восьми деталей

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1	6	7	3	5	10	7	6	5
2	8	5	2	6	8	7	4	9

Упорядочим первую группу по возрастанию p_j: 4, 8, 1, 6. Упорядочим вторую группу по убыванию q_j: 5. 2, 7, 3. Включив в расписание работы первого станка сначала заготовки деталей первой группы, затем второй, получим расписание (41, 81, 11, 61, 51, 21, 71, 31). На в тором станке сохраним ту же последовательность, что и на первом станке. Расписание работы двух станков выглядит следующим образом: A = (41, 81, 11, 61, 51, 21, 71, 31; 42, 82, 12, 52, 22, 72, 32) (рис. 6).

Рис. 6. Расписание изготовления восьми деталей

Анализируя эту диаграмму, нетрудно убедиться в том, что найденное оптимальное расписание не является единственным. Например, в последовательности подачи заготовок на в торой станок можно без увеличения продолжительности изготовления всего комплекта деталей поменять местами заготовки деталей 7 и 3. Таким образом, предположив, что на втором станке сохраняется та же последовательность обработки, что и на первом, мы отбросили не только худшие, но и равные по качеству расписания. Важно,

однако, чтобы среди оставшихся расписаний сохранилось оптимальное.

При составлении расписания работы трех и более с танков методы, применяемые при составлении расписания работы двух станков, неэффективны. В этом случае для практических целей чаще всего используют так называемые эвристические алгоритмы (решающие правила), которые позволяют построить расписание без полного или частичного перебора вариантов и подбираются и уточняются по опыту эксплуатации производственной системы. Решающие правила не претендуют на нахождение оптимального решения, однако позволяют более полно учесть производственную природу решаемой задачи и как бы формализуют накопленный практический опыт управления.

Рассмотрим некоторые эвристические алгоритмы на примере составления расписания работы ГПС, состоящей из четырех станков, при изготовлении группы, включающей 8 деталей (табл. 5). Маршруты обработки являются одновариантными, и заготовки последовательно проходят через первый, второй, третий и четвертый станки.

Таблица 5

Трудоемкость изготовления деталей на четырех станках

Номер станка	Номер детали							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Трудоемкость операции, мин							
1	4	6	2	3	4	8	5	2
2	6	3	4	5	8	2	7	10
3	3	2	5	8	5	4	3	7
4	5	2	3	3	2	6	4	3

Составим расписание работы ГПС, используя правило «кратчайшей операции», которое формулируется в следующем виде: из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на данном станке, выбирают детали с минимальным временем обработки заготовок на этом станке. В расписании работы второго и последующего станков необходимо включить заготовки, уже обработанные на предыдущих операциях, ранжируя их в порядке увеличения трудоемкости обработки. Правило кратчайшей операции применяют в том случае, когда необходимо как можно быстрее загрузить работой следующие по технологическому маршруту станки. Окончательный вариант расписания выбирают после построения диаграммы Гантта и стремятся при этом к сокращению общей трудоемкости изготовления всей группы деталей.

Расписание изготовления деталей, составленное в соответствии с правилом кратчайшей операции, применительно к портфелю работ, приведенному в табл. 5, выглядит следующим образом.

Станок 1: 31, 81, 41, 51, 11, 71, 21, 61.
Станок 2: 32, 82, 42, 12, 22, 72, 62, 52.
Станок 3: 33, 83, 43, 23, 13, 73, 63, 53.
Станок 4: 34, 84, 44, 24, 14, 74, 64, 54 (рис. 7).

Номер станка	Время, мин												
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1	31 81 41 51 11 71 21 61												
2	32 82 42 12 22 72 62 52												
3		33		83		43	23 13	73	63	53			
4			34		84		44 24 14		74	64	54		

Рис. 7. Расписание изготовления восьми деталей, построенное по правилу «кратчайшей операции»

Теперь составим расписание работы ГПС, используя правило «максимальной ос таточной трудоемкости», которое формулируется в следующем виде: из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на станке, выбирают заготовки деталей с максимальной суммой времени обработки на всех еще не пройденных станках, включая данный станок.

Это правило целесообразно использовать для ус тановления последовательности обработки внутри одной группы деталей, если детали, входящие в группу, существенно различаются по трудоемкости изготовления.

Применяя правило максимальной ос таточной трудоемкости к деталям, трудоемкость изготовления которых приведена в табл. 5, составим расписание работы ГПС и построим диаграмму Гантта (рис. 8).

Далее составим расписание работы ГПС, используя правило «минимальной остаточной трудоемкости», которое формулируется в следующем виде: из текущего портфеля работ, подготовленных к выполнению на данном станке, выбирают заготовки деталей с минимальной суммарной трудоемкостью обработки на всех еще не пройденных станках, включая данный станок. Это правило противоположно предыдущему и предназначено для того, чтобы по возможности быс трее разгрузить ГПС, сократив количество

находящихся в производстве наименований деталей и используемых грузоносителей.

Станок 1:81,61,71, 51,41, 11,31,21
Станок 2:82,62, 72. 42, 52, 12, 32, 22.
Станок 3: 83, 63,73, 43, 53,13, 33,23.
Станок 4: 84, 64, 74, 44, 54,14, 34, 24.

Номер станка	Время, мин												
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1	81	61	71	51	41	11	31	21					
2	82		62	72	42		52	12	32	22			
3			83	63	73		43	53	13	33	23		
4				84	64	74		44	54	14	34	24	

Рис. 8. Расписание изготовления восьми деталей, построенное по правилу «максимальной остаточной трудоемкости»

Станок 1:21,31, 11,41,51,71,61,81.
Станок 2: 22, 32, 12, 52, 42, 62, 72, 82.
Станок 3: 23, 33. 13, 53, 43, 63, 73, 83.
Станок 4: 24. 34, 14, 54, 44, 64, 74, 84.

Применяя правило минимальной остаточной трудоемкости к деталям, трудоемкость изготовления которых приведена в табл. 5, получим следующее расписание работы ГПС и построим Гантт-карту (рис. 9).

Существуют и другие решающие правила, в том числе более сложные, построенные на основе комбинирования рассмотренных выше правил [10, 12]. Следует иметь в виду, что для формирования реального расписания работы ГПС необходимо оперировать реальными данными об изготавливаемых деталях и их заготовках и проанализировать с помощью имитационной модели сотни примеров для аргументированного выбора решающего правила, дающего одно из наилучших расписаний.

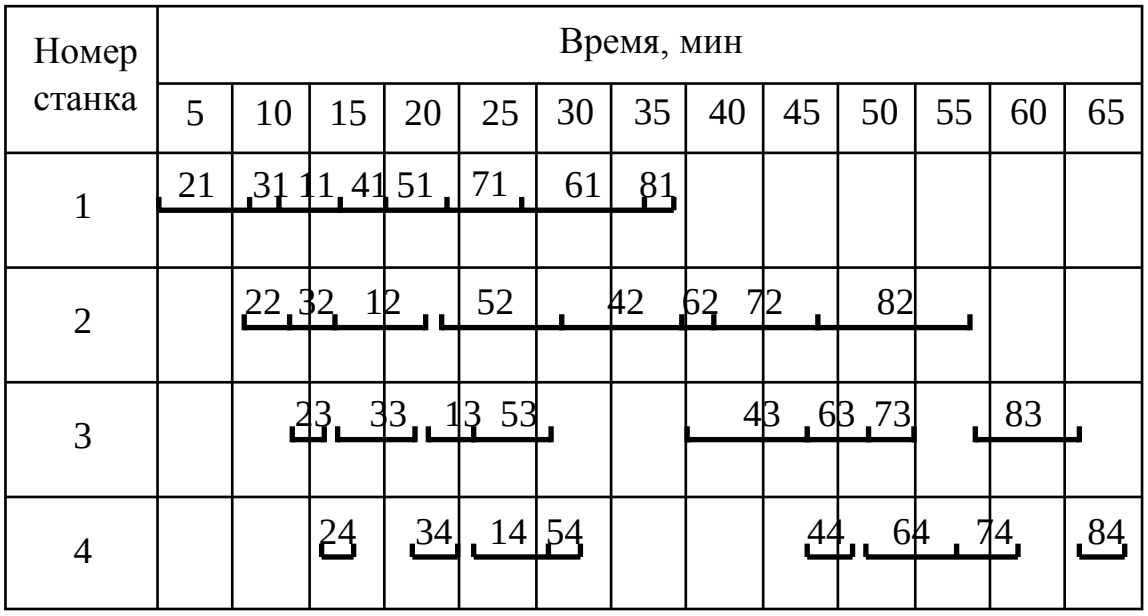


Рис. 9. Расписание изготовления восьми деталей, построенное по правилу «минимальной остаточной трудоемкости»

2. 2. 7. Тема № 7. Теория массового обслуживания

Одним из основных понятий теории массового обслуживания является понятие о входящем потоке требований (заявок) на обслуживание. Поток требований представляет собой последовательнос ть однородных событий, которые наступают через случайные интервалы при непрерывном отсчете времени.

Главной характеристикой входящего потока является его основной параметр $\lambda(t)$ или интенсивность потока требований в системе. Параметр потока требований определяет среднее количество заявок на обслуживание, поступающих в единицу времени. Он связан со средним промежутком времени $\bar{\tau}(t)$ между двумя очередными обслуживаниями в момент времени t следующим соотношением: $\lambda(t)=1/\bar{\tau}(t)$.

Поток заявок называется *стационарным* (регулярным), если его вероятностный режим не изменяется во времени, т. е. если интенсивнос ть потока заявок постоянна (события (заявки) следуют друг за другом через строго определенные промежутки времени): $\lambda(t)=\text{const}=\lambda=1/\bar{\tau}$.

Если события (заявки, требования), о которых идет речь, являются однородными с точки зрения их сущности и формы проявления, то и поток называется *однородным*.

Важное значение в теории массового обслуживания имеют потоки требований, в которых интервалы между последовательно возникающими

требованиями распределяются по экспоненциальному (показательному) закону распределения, плотнос ть вероятнос ти которого определяется уравнением

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}.$$

Такой поток называют *пуассоновским* потоком требований. Гис тограмма и плотность вероятности потока заявок при экспоненциальном законе распределения представлены на рис. 10. Эта кривая показывает, что малых промежутков времени между моментами возникновения заявок больше, чем больших, и вероятнос ть возникновения заявки через интервал τ убывает по мере его увеличения.

В некоторых реальных потоках число требований, поступивших в систему после произвольного момента времени t, не зависит от того, какое число требований пос тупило в систему до этого. Это свойство независимости характера потока требований от числа пос тупивших требований и моментов их поступления носит название *отсутствия последействия*. *Потоком с ограниченным последействием* называется поток, в котором величины $\tau_1, \tau_2, \tau_3 ...$ взаимно независимы.

Поток требований называют *ординарным*, если вероятнос ть появления двух и более заявок в один и тот же момент времени настолько мала, что практически можно считать невозможным совмещение двух или более событий в один и тот же момент времени.

Поток требований называется *простейшим*, если он одновременно ординарный, стационарный и без последействия. Существует теорема, согласно которой в простейшем потоке требований промежутки времени между соседними заявками распределяются по экспоненциальному закону.

Другим основным понятием теории массового обслуживания является время обслуживания, характеризующее затраты времени одним обслуживающим устройством на обслуживание одной заявки.

В связи с тем, что время обслуживания не является детерминированным, а изменяется от одного требования к другому, оно рассматривается как величина случайная.

Очень час то время обслуживания распределяется по экспоненциальному закону распределения с плотностью вероятнос ти (см. рис. 10)

$$f(t) = \mu e^{-\mu t_0},$$

где μ – интенсивность обслуживания, или среднее число обслуживаний в единицу времени t_0.

Рассмотрим процесс организации технического контроля в относительно небольшом механосборочном цехе, где для этой цели дос таточно иметь всего один пост технического контроля. Пусть время, затрачиваемое на контроль одной партии заготовок, составляет точно два часа (детерминировано), а

заготовки поступают на контроль так же регулярно (через каждые два часа). При этом график работы пос та технического контроля примет вид, представленный на рис. 11, а.

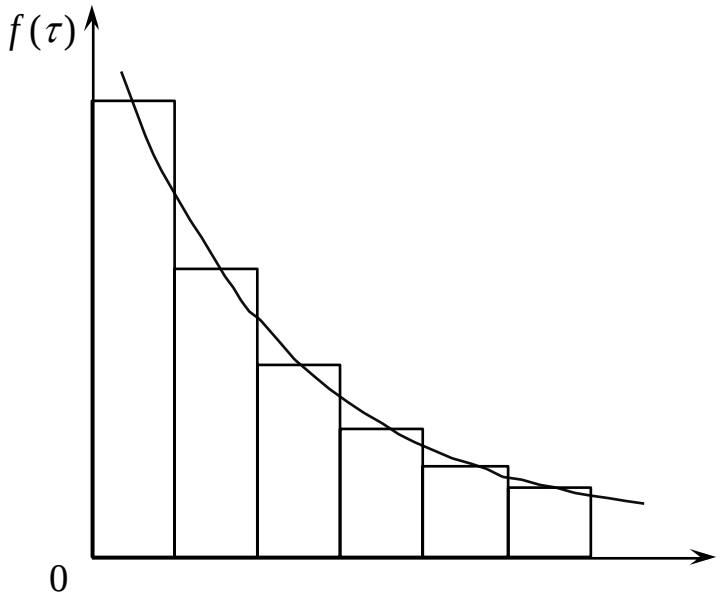


Рис. 10. Плотность вероятности при экспоненциальном законе распределения

В этом случае пролеживание заготовок в ожидании контроля и простои поста в ожидании заготовок отсутствуют. Положение изменится, если хотя бы один из исходных параметров в этой задаче (промежуток времени между поступлениями заготовок на контроль или время выполнения технического контроля) окажется не детерминированным, а стохастическим. Такой случай проиллюс трирован графиками, приведенными на рис. 11, б, в.

В результате рассеивания значений одного из исходных параметров появились простои как заготовок (пролеж ивание в ожидании контроля), так и контролера в ожидании поступления заготовок, т. е. возникло явление очередей.

Таким образом, явление очередей есть прямое следствие рассеивания исходных параметров и стохас тичности рассматриваемых процессов. Исследованием очередей теория массового обслуживания занимается путем изучения своеобразного класса систем, называемых *системами массового обслуживания* (СМО).

Каждая такая система объединяет некоторое количество параллельно действующих технических устройств (иногда людей – исполнителей), называемых *каналами обслуживания* (возможен случай, когда канал один). Они могут самостоятельно (независимо) выполнять все операции, лежащие в основе функционирования СМО, и увеличивать тем самым пропускную способность системы, определяемую числом обслуживаний, завершенных в единицу

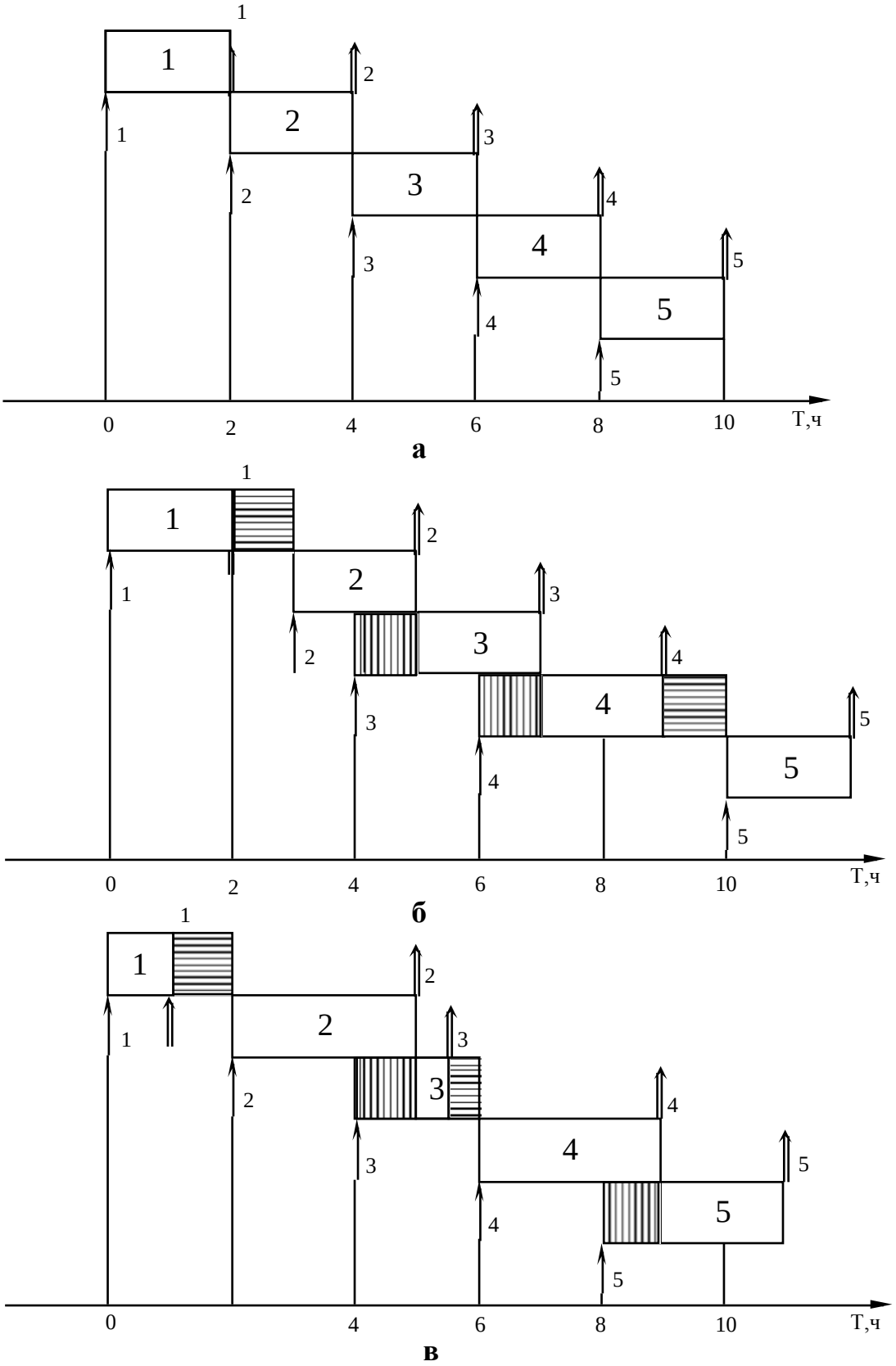


Рис.11. Детерминированный график работы технологического оборудования (а), график работы технологического оборудования при вероятностном характере поступления заявок (б) и при рассеивании времени технологических операций (в): 1 – поступление заявки; 1 – длительность обслуживания заявки; 1 – уход обслуженной заявки; – простой технологического оборудования; – время ожидания заявки

времени. Следовательно, в структурном отношении любая СМО может рассматриваться как мультипроцессор, работающий в условиях неопределенности, связанной с действием случайных факторов.

В любой СМО существует опасность возникновения очереди заявок (требований) в одни периоды времени и прос тоя оборудования (исполнителей) из-за отсутствия заказов в другие периоды, поэтому главная задача исследований состоит в поиске связей между показателями (критериями) эффективности той или иной системы, ее структурой и условиями работы.

В качестве критериев выбирают среднее время обслуживания поступающих заявок, среднюю (или максимальную) длину очереди, количество каналов обслуживания и др.

Теория массового обслуживания рассматривает различные системы массового обслуживания. Все они состоят из трех основных элементов: источника требований 1, накопителя 2 и узла обслуживания 3 (рис. 12, 13). Если узел обслуживания состоит всего из одного обслуживающего устройства (исполнителя), такая система называется *одноканальной* (рис. 12, а, 13, а), при большем числе устройств (исполнителей) – *многоканальной* (рис. 12, б, 13, б).

Различают разомкнутые (см. рис. 12) и замкнутые (см. рис. 13) системы массового обслуживания. Нередко число требований, которые могут пос тупать в систему, бывает неограниченным или такое предположение является удобным.

Признаком замкнутой системы является то положение, что обслуженные требования не покидают систему, а возвращаются в источник требований (см. рис. 13). При этом интенсивнос ть входящего потока зависит от количества требований, находящихся в системе. Поясним это на следующем примере. Пусть в механосборочном цехе имеется $A_{сп}$ станков, которые периодически требуют выполнения текущего ремонта. Если интенсивность элементарного потока требований на текущий ремонт одного станка является постоянной, то этого нельзя сказать об интенсивности суммарного потока требований Λ, исходящих от всех станков. Неправильно было бы считать, что $\Lambda = \lambda \cdot A_{сп}$.

Требования могут исходить не от всех, а только от исправных станков, которые находятся в эксплуатации. Неисправный станок, ранее потребовавший ремонта, может вновь потребовать ремонта только после того, как будет отремонтирован (возвратится в источник требований) и вновь начнет эксплуатироваться. Поэтому интенсивность входящего потока будет равна не $\lambda \cdot A_{сп}$, а $\Lambda = \lambda \cdot A_{испр}$.

Однако $A_{испр}$ не является постоянной и изменяется во времени, а, следовательно, и λ не является величиной пос тоянной. Поэтому правильнее записать $\Lambda = \lambda \cdot A_{испр}(t)$.

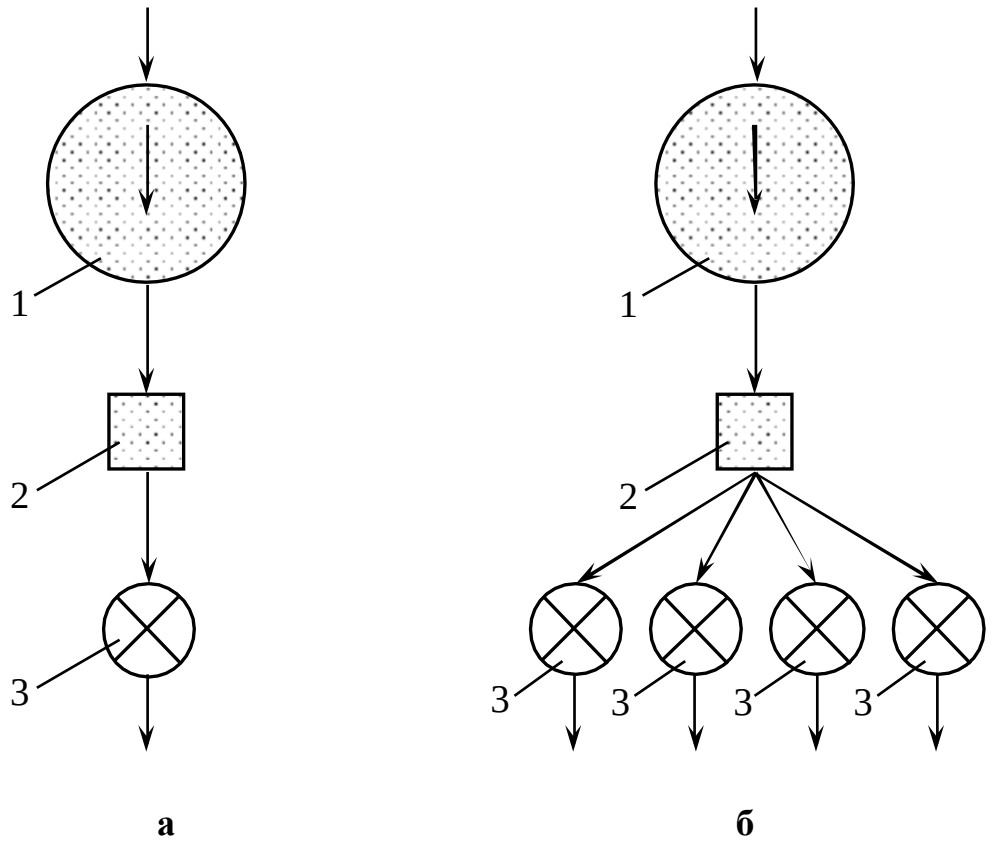


Рис. 12. Разомкнутая одноканальная (а) и многоканальная (б) система массового обслуживания

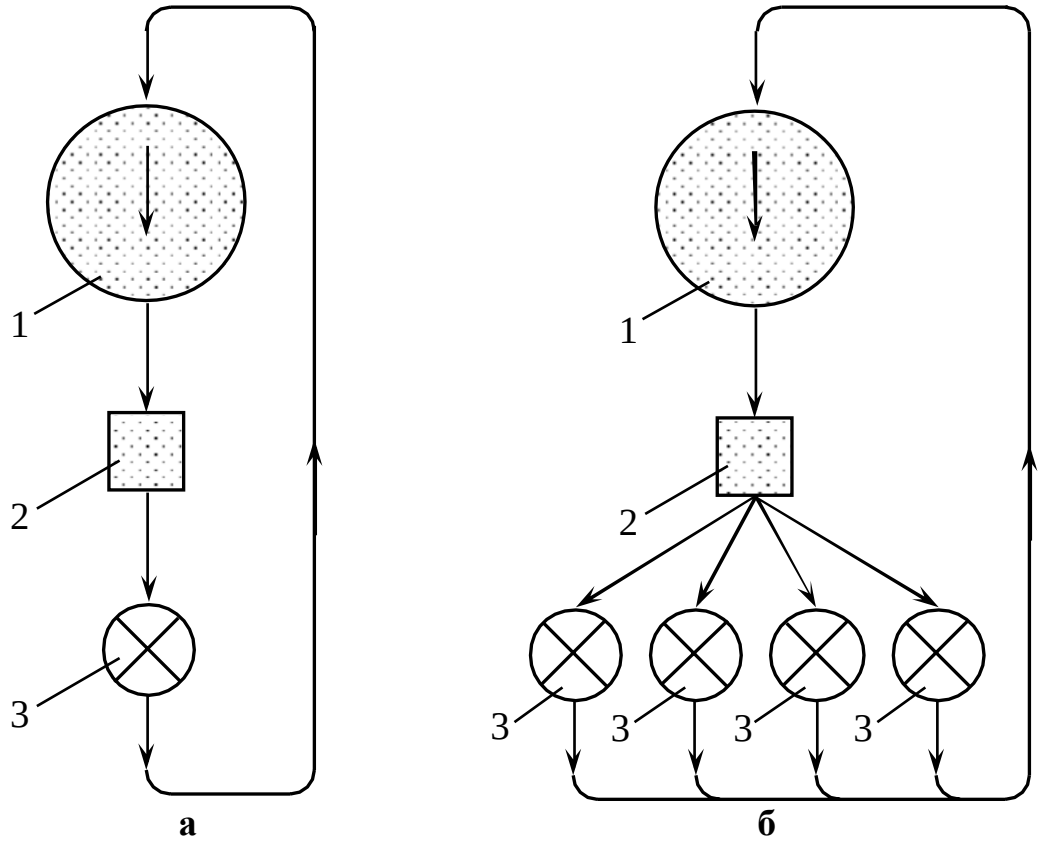


Рис. 13. Замкнутая одноканальная (а) и многоканальная (б) система массового обслуживания

Таким образом, интенсивность входящего потока требований для замкнутых систем не является постоянной величиной.

Различают еще системы массового обслуживания с потерями (с отказами) и без потерь (с очередью). Первая группа сис тем характеризуется тем, что требование не может ждать начала обслуживания или сис тема обслуживания отказывает требованию, если все обслуживающие ус тройс тва (исполнители) заняты.

Сис темы без потерь (с очередью) называются *системами с неограниченным ожиданием*. Имеются также с истемы *с ограниченным ожиданием*, в которых требования могут ожидать обслуживания только ограниченное время, по ис течении которого, если к этому времени не освободится хоть одно обслуживающее устройство, они покидают систему.

Различают также системы с приоритетом и без приоритета. В с истемах без приоритета требования обслуживаютс я в порядке их поступления. Если некоторые из требований пос тупают на обслуживание в первую очередь (не зависимо от того, когда они пос тупили в накопитель), такие сис темы называются *системами массового обслуживания с приоритетом*.

ВАРИАНТЫ ПЕРВОГО ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

В приведенных ниже вариантах (табл. 6) представлены вопросы только первого задания контрольной работы. Эти вопросы охватывают все основные темы дисциплины «Основы математического моделирования». Задания по второму и третьему вопросам контрольной работы приведены в разделах 4 и 5 данных методических указаний. Первое задание содержит формулировку вопроса, а ответ на него в представляемой на рецензию контрольной работе должен включать в себя подробное описание понятий и определений, сопровождаемое материалами из учебной литературы или из практического опыта с тудента, и обязательным графическим иллюстрированием ответа посредством схем, графиков, эскизов и других рисунков.

Таблица 6

Вопросыпервого задания контрольнойработы

Номер варианта	Содержание вопроса
1	2
1	Общая классификация моделей. Классиф икация наглядных и знаковых моделей. Основные этапы моделирования.
2	Виды математических моделей – аналитические, численные, имитационные, функциональные и матричные.

Окончание табл. 6

3	Структура математической модели. Классифик ация математическ их моделей по поведению во времени, виду входной информации и типу используемого математического аппарата.
4	Конечные и бесконечные множества. Основные операции над множествами.
5	Подмножества. Верхняя и нижняя границы множества,
6	Тождества алгебры множеств. Доказательства с помощью диаграммы Эйлера - Венна.
7	Упорядоченные множества. Соответствия, отношения и отображения.
8	Теоретико-множественное представление графа. Основные понятия и определения. Отношение порядка и отношение эквивалентности на графе.
9	Задача о кратчайшем пути. Нахождение кратчайшего пути в графах с ребрами единичной длины (на примере).
10	Нахождение кратчайшего пути в графах с ребрами произвольной длины. Построение графа наименьшей длины.
11	Оптимизация производственных и технологических систем. Основные понятия и определения. Математическая постановка задачи оптимизации
12	Оптимизация. Локальный и глобальный минимумы. Обобщенная задача оптимизации.
13	Классификация задач оптимизации. Задачи минимизации и максимизации.
14	Задачи линейного программирования. Основная задача линейного программирования.
15	Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования (на примере).
16	Симплекс - метод решения задачи линейного программирования.
17	Табличный метод решения задачи линейного программирования.
18	Задачи, решаемые теорией расписаний.
19	Методы теории расписаний.
20	Особенности краткосрочного планирования мелко- и среднесерийного производства
21	Эвристические решающие правила теории расписаний.
22	Общая характеристика систем массового обслуживания.
23	Случайные процессы. Потоки событий.
24	Одноканальные системы массового обслуживания с отказами и с очередью.
25	Многоканальные системы массового обслуживания с отказами.

ВАРИАНТЫ ВТОРОГО ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Разработать маршрутный технологический процесс изготовления представленных на рис. 14 деталей и произвести расчет технологических размерных цепей методом теории графов. Проверить возможность обеспечения заданных на чертеже конструкторских размеров, рассчитать межоперационные припуски и операционные размеры, указанные на технологических эскизах разработанного с тудентом маршрутного технологического процесса, используя методы теории графов. Исходные данные для расчета поставлены в соответствии с номером варианта контрольной работы студента (табл. 7).

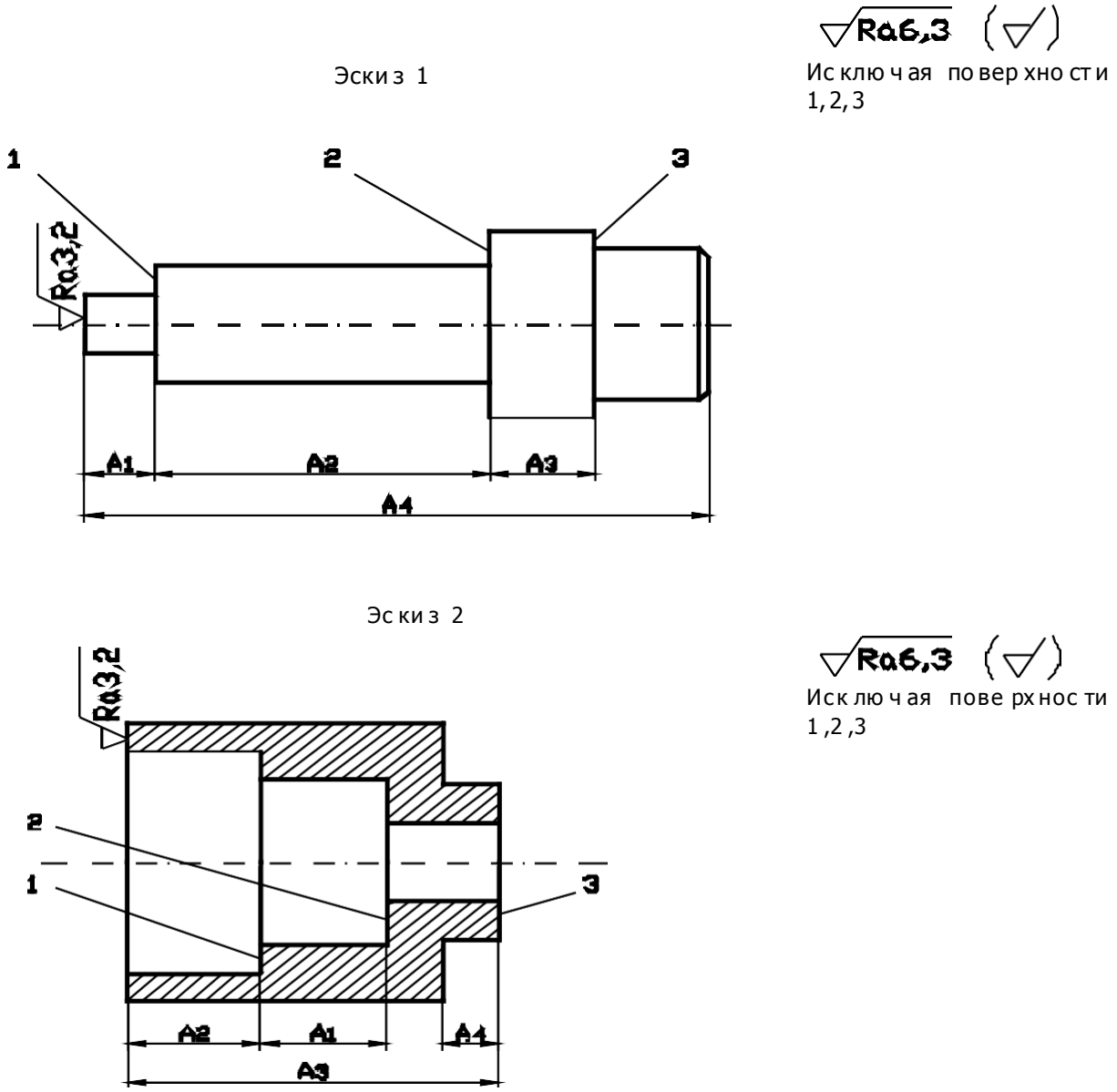


Рис. 14. Эскизы деталей для выполнения второго задания контрольной работы

Таблица 7

Исходные данные для второго задания контрольной работы

№ варианта	№ эскиза на рис. 1	Размеры детали, мм				Шероховатость (Ra) поверхностей в соответствии с их номерами на эскизе, мкм			Годовая программа выпуска деталей, шт.
		A_1	A_2	A_3	A_4	1	2	3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	$5^{+0,1}$	$40_{-0,1}$	$30_{-0,1}$	$78_{-0,1}$	6,3	3,2	1,6	12 000
2	1	$10^{+0,1}$	$60_{-0,15}$	$20_{-0,2}$	$100_{-0,1}$	1,6	0,8	3,2	40 000
3	1	$7^{+0,5}$	$80_{-0,3}$	$10_{-0,3}$	$115_{-0,1}$	1,6	3,2	0,8	300
4	1	$8^{+0,3}$	$100_{-0,2}$	$15_{-0,1}$	$130_{-0,2}$	0,8	0,8	0,8	100 000
5	1	$15_{-0,1}$	$125_{-0,05}$	$25_{-0,05}$	$190_{-0,5}$	6,3	3,2	6,3	15 000
6	1	$20_{-0,5}$	$20_{-0,1}$	$10_{-0,1}$	$80_{-0,1}$	3,2	6,3	6,3	25 000
7	1	$10_{-0,1}$	$35_{-0,1}$	$5_{-0,1}$	$85_{-0,1}$	6,3	6,3	3,2	5000
8	1	$15^{+0,2}$	$65_{-0,6}$	$8_{-0,2}$	$120_{-0,2}$	3,2	0,8	3,2	2500
9	1	$7_{-0,2}$	$75_{-0,05}$	$12_{-0,3}$	$110_{-0,3}$	3,2	3,2	3,2	800
10	1	$12^{+0,2}$	$81_{-0,15}$	$16_{-0,6}$	$120_{-0,5}$	3,2	0,8	0,8	10 000
11	1	$20_{-0,5}$	$35_{-0,4}$	$10_{-0,1}$	$85_{-0,2}$	6,3	3,2	3,2	300
12	1	$15_{-0,5}$	$20_{-0,1}$	$5_{-0,1}$	$80_{-0,2}$	1,6	3,2	1,6	15 000
13	1	$20_{-0,5}$	$60_{-0,15}$	$20_{-0,2}$	$120_{-0,4}$	3,2	1,6	1,6	5000
14	2	$20_{-0,5}$	$15_{-0,2}$	$45_{-0,1}$	$5_{-0,1}$	6,3	3,2	1,6	50
15	2	$10_{-0,4}$	$15_{-0,2}$	$50_{-0,2}$	$10_{-0,1}$	3,2	1,6	6,3	100 000
16	2	$28_{-0,3}$	$14_{-0,1}$	$60_{-0,5}$	$10_{-0,1}$	1,6	6,3	3,2	3000
17	2	$10^{+0,3}$	$10_{-0,1}$	$25_{-0,1}$	$3_{-0,1}$	1,6	3,2	0,8	25 000
18	2	$20^{+0,6}$	$20_{-0,3}$	$50_{-0,5}$	$5_{-0,2}$	3,2	1,6	6,3	70 000
19	2	$10^{+0,1}$	$10_{-0,1}$	$30^{+0,1}$	$6_{-0,2}$	6,3	1,6	3,2	125 000
20	2	$30^{+0,4}$	$35_{-0,3}$	$80^{+0,3}$	$10_{-0,1}$	3,2	6,3	1,6	50 000
21	2	$20_{-0,2}$	$20_{-0,2}$	$64^{+0,1}$	$6_{-0,1}$	0,8	1,6	3,2	10 000
22	2	$20_{-0,1}$	$30_{-0,1}$	$60_{-0,1}$	$5_{-0,1}$	0,8	3,2	1,6	6000
23	2	$20_{-0,1}$	$60_{-0,4}$	$100_{-0,5}$	$10_{-0,2}$	1,6	0,8	3,2	40 000
24	2	$30^{+0,4}$	$40_{-0,3}$	$90_{-0,5}$	$8_{-0,1}$	3,2	0,8	1,6	100
25	2	$25^{+0,3}$	$20_{-0,2}$	$65_{-0,1}$	$10_{-0,2}$	1,6	1,6	1,6	5000

ВАРИАНТЫ ТРЕТЬЕГО ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Предприятие может выпус тить три вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$. Для выпуска продукции требуются ресурсы трех видов: трудовые, станочное оборудование и полуфабрикаты. Определить, в каком количестве и какого вида продукции надо выпустить, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Объемы и нормы расхода ресурсов приведены в условных обозначениях в табл. 8, цифровые значения – в табл. 9.

Таблица 8

Данные для постановки задачи третьего задания контрольной работы

Наименование ресурса	Вид продукции			Объем ресурс-са
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
	Расход ресурса на единицу продукции			
Трудовые ресурсы, человеко-час	a_1	a_2	a_3	a
Станочное оборудование, станко-смена	b_1	b_2	b_3	b
Полуфабрикаты, кг	c_1	c_2	c_3	c
Прибыль с единицы продукции, руб.	p_1	p_2	p_3	max
Выпуск, шт.	x_1	x_2	x_3	

Таблица 9

Исходные данные для выполнения третьего задания контрольной работы

№ вар.	a_1	a_2	a_3	a	b_1	b_2	b_3	b	c_1	c_2	c_3	c	p_1	p_2	p_3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	8	5	7	280	6	7	4	480	9	6	5	360	8	7	5
2	15	18	12	420	6	4	4	360	4	5	8	540	120	80	160
3	3	3	2	360	2	4	3	240	6	9	8	180	24	25	18
4	6	8	9	360	1	3	2	240	3	2	3	180	18	12	15
5	2	5	6	240	3	7	7	420	4	4	2	300	12	18	16
6	2	4	2	120	6	5	1	280	7	7	4	30	16	12	18
7	15	8	6	420	12	7	9	120	6	12	10	240	12	18	20
8	10	12	6	200	4	8	14	200	15	8	6	420	20	12	18
9	8	5	2	120	2	4	7	150	4	3	8	180	3	6	7
10	8	5	2	120	7	2	4	180	4	3	9	150	12	16	20
11	2	4	3	180	6	9	8	240	1	3	2	180	12	15	25
12	3	1	2	60	4	3	2	90	9	8	3	150	45	75	60
13	2	2	1	120	2	6	5	420	7	3	7	240	18	16	12
14	3	7	7	420	2	2	1	120	2	4	2	120	20	10	15
15	12	9	7	240	6	12	10	120	8	4	14	200	18	20	12
16	14	12	12	420	10	7	15	240	9	8	8	120	16	20	24
17	12	13	15	250	10	15	12	300	8	7	9	350	12	15	18
18	16	8	12	240	4	1	8	120	6	18	12	180	24	18	30
19	15	25	10	400	10	15	10	350	5	15	15	300	30	20	25
20	4	3	1	60	1	5	2	50	6	2	8	100	10	12	18
21	6	14	16	420	1	20	12	360	4	4	4	160	20	8	16
22	13	12	7	300	1	20	10	350	7	14	15	250	16	24	20
23	9	15	18	270	6	3	9	180	12	15	6	390	24	30	15
24	2	4	4	220	1	1	1	100	6	2	8	180	20	18	16
25	7	9	12	150	5	1	10	200	4	6	8	240	12	16	8

Список литературы:

1. Белов, М. А. Размерный анализ технологических процессов обработки заготовок: учебное пособие / М. А. Белов, А. Н. Унянин; под общ. Ред. Л. В. Худобина. – Ульяновск : УлГТУ, 1997. – 148 с.
2. Веткасов, Н. И. Математическое моделирование производственных и технологических процессов : программа курса и методические указания / Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин, С. И. Рязанов. – Ульяновск : УлГТУ, 1997. – 24 с.
3. Веткасов, Н. И. Применение методов теории графов и линейного программирования для решения производственных и технологических задач : методические указания / Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин. – Ульяновск : УлГТУ, 2001. – 36 с.
4. Веткасов, Н. И. Применение теории множеств и теории расписаний для решения организационно-технологических задач : методические указания / Н. И. Веткасов, Ю. В. Псигин. – Ульяновск : УлГТУ, 1997. – 24 с.
5. Гнедонко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнедонко, Н. Н. Коваленко. – М. : Наука, 1986. – 485 с.
6. Дектярев, Ю. И. Исследование операций / Ю. И. Дектярев. – М. : Высшая школа, 1986. – 320 с.
7. Коршунов, Ю. М. Математические основы кибернетики : учебное пособие / Ю. М. Коршунов. – М. : Энергия, 1972. – 376 с.
8. Математическое моделирование / В. П. Скурихин и др. – Киев : Техника, 1983. – 270 с.
9. Оперативно-производственное планирование в ГПС / под ред.Б. И. Черпакова. – М. : Высшая школа, 1989. – 95 с.
10. Основы теории оптимизации / Ногин В. Д. и др.; под ред. И. О. Протодьяконова. – М. : Высшая школа, 1986. – 384 с.
11. Прикладная статистика : справочное издание / Айвазян С. А. и др. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
12. Псигин, Ю. В. Основы математического моделирования производственных процессов : учебное пособие / Ю. В. Псигин; под ред. Н. И. Веткасова. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 108 с.
13. Система автоматизированного проектирования технологических процессов, приспособлений и режущих инструментов / под ред. С. Н. Корчака. – М. : Машиностроение, 1988. – 352 с.
14. Таньев, В.С. Введение в теорию расписаний / В. С. Таньев, В. В. Шкурба. – М. : Наука, 1975. – 256 с.
15. Худобин, Л. В. Разработка технологических процессов изготовления деталей в курсовых и дипломных проектах : учебное пособие / Л. В. Худобин, В. Р. Берзин, В. Ф. Гурьянихин. – Ульяновск : УлГТУ, 1996. – 148 с.