Департамент внутренней и кадровой политики Белгородской области

Областное государственное автономное профессиональное образовательное учреждение «Валуйский колледж»

Методические рекомендации по организации и выполнению практических работ

Элементы высшей математики

(МДК, УД)

Специальность

09.02.07 Информационные системы и программирование.

Рассмотрено на заседании ПЦК предметно-цикловой комиссией математических дисциплин и информационных технологий, протокол

№ 1 от «31» августа 2020 г.

Руководитель: И. В. Крапивина

Методические рекомендации для проведения практических работ студентов 2 курса по УД Элементы высшей математики 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Составитель: Дураков С.Г., преподаватель

Пояснительная записка

К основным видам учебных занятий наряду с другими (урок, лекция, семинар, контрольная, лабораторная работа, консультация, практика, курсовая работа) относится практическое занятие, которое направлено на формирование учебных и профессиональных практических умений.

Состав и содержание практического занятия определяется его ведущей дидактической целью: формирование практических умений:

- профессиональных (выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности);
- учебных, необходимых в последующей учебной деятельности.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки студентов.

Практические занятия в среднем профессиональном образовании являются специфическим педагогическим средством организации и управления деятельностью студентов в учебном процессе.

Практическая работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

В данных рекомендациях содержатся планы практических занятий с указанием целей, краткого теоретического обоснования, оборудования, последовательности выполнения и контрольных вопросов.

Критерии оценки:

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практическая работа № 1. «Действия с матрицами»

<u>Цель работы:</u>

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Действия с матрицами»

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1.Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.

2.Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев.– 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.

3.Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов 2010 г.

4.Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высшая школа, 2010 г.

<u>Краткие теоретические сведения:</u>

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица *B* имеет размер *m*x*n*» означает, что речь идет о матрице, состоящей из *m* строк и *n* столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы *A* (размера *n*x*n)* образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3* $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A, B* называются *равными* (*A*=*B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=6$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *mxn* и *B* размера *nxp*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *mxp,* и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).*

Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4)\\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4)\\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & 2+4\\ 0+12 & 0+16\\ 2+3 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}$

Матрицей, ***транспонированной*** к матрице *A* размера *mxn,* называется матрица A^T размера *nxm,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$$ Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A)*. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2*.

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*x*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*x*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.

<u>Примеры по теме:</u>

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$;2) $\begin{vmatrix}-1 & i\\ i & -1\end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & -10\end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание

4.4 Формулы расчета

4.5 Результат

Практическая работа №2. «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»

<u>Цель работы:</u>

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1.Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.

2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.

3.Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов 2010 г.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное

<u>Краткие теоретические сведения</u>

1.Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты $a_{11,12},\ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, b_2, \ldots, b_n$ считаются заданными. Вектор -строка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо переменных все уравнения системы (1) обращаются в верное равенство.

Определитель n-го порядка $\Delta = |A| = |a_{ij}|$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (1). В зависимости от определителя системы (1) различают следующие случаи:

а) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по **формулам Крамера** : $\mathbf{x_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots\ldots, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где определитель n-го порядка Δ_i (i=1,2,...,n) получается из определителя системы путем замены i-го столбца свободными членами $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

б) Если $\Delta=0$, то система (1) либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна ,т.е. решений нет.

2. Рекомендации по выполнению заданий

1. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \textbf{(2).}$$

1. В данной системе составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и вычислим**.**

2. Составить и вычислить следующие определители**:**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{3.}$$

Воспользоваться **формулами Крамера.**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Практическое значение правила Крамера для решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными невелико, так как при его применении приходится вычислять *n +1* определителей *n*-го порядка: $\Delta, \Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \ldots, \Delta x_n$. Более удобным является так называемый *метод Гаусса.* Он применим и в

более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.
Более удобным является так называемый ***метод Гаусса.*** Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.
Дана система, содержащая *m* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Метод Гаусса решения системы заключается в последовательном исключении переменных.

Алгоритм для решения системы линейных уравнений методом Гаусса

Выражаем первое неизвестное из первого уравнения и подставляем его в остальные уравнения.
Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше.
С новой системой поступаем таким же образом и так продолжаем до тех пор, пока не останется одно линейное уравнение, которое легко решается.
Когда получено значение последнего неизвестного x_n, подставляем его в уравнение, которое позволяет найти x_{n-1} по x_n.
По найденным x_{n-1} и x_n находим x_{n-2} и таким образом находим последовательно все неизвестные.
Для систем нелинейных уравнений этот метод не всегда применим уже в силу того, что из уравнений системы совсем не обязательно можно будет выразить одну неизвестную через остальные.

<u>Порядок выполнения работы:</u>

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

<u>Примеры по теме:</u>

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3, \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases} b)\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

<u>Примеры по теме:</u>

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3, \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases} b)\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
4.1 Название работы
4.2 Цель работы

4.3 Задание
4.4 Формулы расчета
4.5 Результат

Практическая работа №3. «Уравнение прямой и кривой второго порядка».

Цель работы:

1.1 Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме : «Уравнение прямой и кривой второго порядка».

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов 2-е изд., перераб. И доп. – М.:ЮНИТИ, 2002
3.Богомолов, Н.В Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие / Н.В.Богомолов – 10-е изд. , стер.-м.: Высш. Шк., 2009 – 495с
4. Дадаян, А.А Математика [Текст]: учебник / А.А.Дадян – М.: Форум: Инфра- М, 2005 – 552 с. – (Профессиональное образование)

<u>Краткие теоретические сведения</u>

Определение: уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$параллельно вектору $\vec{q} = (m; n; p)$, имеет вид $\vec{r} = r_0 + t\vec{q}$ и называется векторно-параметрическим уравнением прямой.

Замечание: $\vec{r}$- радиус вектор любой точки$M(x; y; z)$прямой; r_0- радиус вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$; t-параметр, принимающий всевозможные действительные значения. Вектор $\vec{q}$ называется направляющим вектором прямой, а его координаты – направляющими коэффициентами прямой.

Определение: параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$x = x_0 + tm, \qquad y = y_0 + nt, \qquad z = z_0 + pt$$

Определение: канонические уравнения прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Определение: уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

*Определение:*общие уравнения прямойимеют вид:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

<u>Задача:</u> Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1; 3)$ и параллельной вектору $\vec{q} = (4; -5; -6)$.

<u>Решение:</u> найдем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{-5} = \frac{z - 3}{-6}$$

Если эти уравнения записать в виде системы, то получим общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-5} \\ \frac{y-1}{-5} = \frac{z-3}{-6} \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} 5x + 4y - 14 = 0 \\ 6y - 5z + 9 = 0 \end{cases}.$$

Определение: окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром.

Определение: уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом rимеет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Определение: уравнение окружности с центром в точке $O_1(a; b)$ и радиусом rимеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Определение: уравнение окружности в общем виде $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, A, B, C, D$ −постоянные коэффициенты.

Определение: эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, большая расстояния между фокусами $(2c)$.

Определение: уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (a > b), a$ −длина большой полуоси; b −длина малой полуоси.

Зависимость между параметрами a, b, cвыражается соотношением $a^2 - b^2 = c^2$.

Определение: эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большой оси $2a$:$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}} < 1$.

Определение: гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, меньшая расстояния между фокусами $(2c)$.

Определение: уравнение гиперболы, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, a −длина действительной полуоси; b −длина мнимой полуоси.

Зависимость между параметрами a, b, cвыражается соотношением $b^2 = c^2 - a^2$.

Определение: эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к ее действительной оси:$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} > 1$.

Определение: параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Определение: уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oxи ветви направлены вправо, имеет вид $y^2 = 2px$, где $p > 0$(параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Определение: уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oxи ветви направлены влево, имеет вид $y^2 = -2px$, где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $x = \frac{p}{2}$.

Определение: уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oyи ветви направлены вверх, имеет вид $x^2 = 2py$, где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Определение: уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oyи ветви направлены вниз, имеет вид $x^2 = -2py$, где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $x = \frac{p}{2}$.

<u>Порядок выполнения работы:</u>

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

Содержание работы

Задача 1. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2; -3; 4)$ параллельно вектору $\vec{q} = (-1; 4; -2)$.

Задача 2. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если расстояние между фокусами равно 20,а эксцентриситет равен $5/6$.

Задача 3. Дана гипербола $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{63} = 1$. Найдите его эксцентриситет.

Задача 4. Дана парабола $y^2 - 2y + 16x + 65 = 0$. Составьте уравнение ее оси.

Задача 5. Дана парабола $x^2 + 6x - 12y - 3 = 0$. Составьте уравнение ее директрисы.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание

4.4 Формулы расчета

4.5 Результат

Практическая работа №4. «Вычисление пределов, раскрытие неопределенности»

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме : «Вычисление пределов»

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов 2-е изд., перераб. И доп. – М.:ЮНИТИ, 2002
2.Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. Пособие.-2-е изд., перераб. И доп. – М.: Наука, 1989
3.Богомолов, Н.В Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие / Н.В.Богомолов – 10-е изд. , стер.-м.: Высш. Шк., 2009 – 495с
4. Дадаян, А.А Математика [Текст]: учебник / А.А.Дадян – М.: Форум: Инфра- М, 2005 – 552 с. – (Профессиональное образование)

2. Краткие теоретические сведения

Предел рациональной функции

Определение: Целой рациональной функцией$P_n(x)$называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a\epsilon R$$

Теорема 1.Предел целой рациональной функции при $x \to a$, равен значению этой функции в точке a, т.е.$\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

Предел дробно-рациональной функции

Определение: дробно-рациональной функцией$R(x)$называется функция вида $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ –целые рациональные функции.

Теорема 2: предел дробно-рациональной функции при $x \to a$, если при этом знаменатель не обращается в нуль, равен значению функции в точке a, т.е. $\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}, Q_m(a) \neq 0$

Определение: функция $f(x)$называется бесконечно малой при$x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

*Определение:*функция $f(x)$называется бесконечно большой при$x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Теорема 3: отношение функции, имеющий конечный предел при $x \to a$, не равный нулю, к функции бесконечно малой при$x \to a$ есть величина бесконечно большая.

Задача. Вычислить $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x-6}{x-1}$

Решение. Предел знаменателя в точке $x = 1$ равен нулю, поэтому теорема 2 не применима. Найдем отдельно предел числителя и предел знаменателя при $x \to 1$.

$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x - 6 = -3, \lim_{x\to 1} x - 1 = 0.$

Предел числителя конечен, предел знаменателя равен нулю, используя теорему 3, получим $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x-6}{x-1} = \infty$.

Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

Задача. Вычислить $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$.

Пределы на бесконечность

Определение: предел целой рациональной функции при$x \to \infty$равен $\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \infty$.
Теорема 4: отношение функции, имеющий конечный предел при$x \to \infty$ к функции бесконечно большой, есть величина бесконечно малая.
Задача. Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{4x+1}$
Решение. Предел числителя равен 5, предел знаменателя равен∞,т.е. имеем отношение конечного предела к функции бесконечно большой, поэтому, применив теорему 4 получим $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{4x+1} = 0$.
Задача.Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^4+2x^3-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2\backslash x+3\backslash x^2}{x^2+2x-7\backslash x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0$
Предел дробно-рациональной функции при $x \to \infty$ равен
1) 0, если степень числителя ниже степени знаменателя;
2) отношению коэффициентов при старших степенях x, если степени числителя и знаменателя равны;
3)∞, если степень числителя выше степени знаменателя.

Порядок выполнения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

Содержание работы

Задача 1. $\lim_{x\to 2}(6x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$
Задача 2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
Задача 3. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+5)^3}{(4x-2)^2}$
Задача 4.$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} cos3x$
Задача 5.$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{4x}$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
4.1 Название работы
4.2 Цель работы
4.3 Задание
4.4 Формулы расчета
4.5 Результат

Практическая работа №5. «Производная и дифференциал функции»

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Вычисление производных и дифференциалов высших порядков»

Перечень справочной литературы :

1.Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2.Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев– 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3.Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов.2010
Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов.2010 г.

<u>Краткие теоретические сведения:</u>

Правила дифференцирования

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;
2) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + \upsilon' \times u$, в частности $(cu)' = cu'$;
3) $(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u' \times \upsilon - \upsilon' \times u}{\upsilon^2}$;
4) $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;
5) $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1.$(C)' = 0$

2.$(u^{\alpha})' = \alpha \times u^{\alpha - 1}$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$;

3.$(a^u)' = a^u$, в частности, $(e^u)' = e^u$;

4.$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u}$;

5.$(\sin u)' = \cos u$; 6.$(\cos u)' = -\sin u$; 7.$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}$; 8.$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$;

9.$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 10.$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 11.$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}$;

12.$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}$;

Производная сложной и обратной функций

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом x и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$,

то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \times \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается dy:

$dy = f'(x) \times \Delta x$. $(dy = f'(x)dx)$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Примеры:

Найти дифференциал функции y = $\cos x + 5x^2$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x)dx$ получаем dy = (-sinx+10x)dx.

2. Для функции $y = x^3 - x^2 + 1$ найти приращение Δy при $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x) \times \Delta x$ получаем $dy = (x^3 - x^2 + 1)' \times \Delta x =$ $=(3x^2 - 2x) \times \Delta x$. Выполняя подстановку $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$, находим приращение Δy:

$\Delta y = (3 \times (-1)^2 - 2 \times (-1)) \times 0{,}01 = 0{,}05$

Ответ: $\Delta y = 0{,}05$

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

<u>Содержание работы</u>

1.Найдите производную функции:

$y = \frac{7}{x} + 3\sqrt{x} - tg2x - 3^x$

$y = cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = (3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3})^5$

$y = \sqrt{2 - 5x} + (3x - 5)^6$

$y = \frac{(3x-5)^4}{(2x-4)^3}$

2.Найдите дифференциал

функции:

$y = 3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}$

$y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - ctg3x + 5^x$

$y = \left(-2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3}x\right)^4$

$y = (8x-7)^3 + \sqrt{9-3x}$

$y = \frac{(4x-9)^4}{(3-5x)^3}$

4. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание

4.4 Формулы расчета

4.5 Результат

Практическая работа №6. «Полное исследование функции. Построение графиков»

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Полное исследование функции. Построение графиков»

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов 2-е изд., перераб. И доп. – М.:ЮНИТИ, 2002

2.Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. Пособие.-2-е изд., перераб. И доп. – М.: Наука, 1989

3.Богомолов, Н.В Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие / Н.В.Богомолов – 10-е изд. , стер.-м.: Высш. Шк., 2009 – 495с

4. Дадаян, А.А Математика [Текст]: учебник / А.А.Дадян – М.: Форум: Инфра- М, 2005 – 552 с. – (Профессиональное образование).

<u>Краткие теоретические сведения:</u>

Схема исследования функции и построения графика:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
3. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.
7. Построить график функции.

<u>Задача.</u> Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и построить ее график:

Решение:

1. $D(f)=R$.
2. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

   Наклонных асимптот так же нет, так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x}{x}=\infty$.
3. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-(x^3-3x)=-f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.
4. Точки пересечения графика с осью *OX:* $\begin{cases} y=0 \\ x=0,\pm\sqrt{3} \end{cases}$;

   Точки пересечения графика с осью *OY:* $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.
5. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

   $f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-3=0, x=\pm1$

   Функция возрастает на $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; функция убывает на $[-1;1]$.

   $x=-1$ - точка максимума, $x=1$ - точка минимума.

   Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	*возраст.*	2	*убывает*	-2	*возраст.*
		макс.		*мин.*	

6. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

   $f''(x)=6x,\ f''(x)=0\Rightarrow x=0$

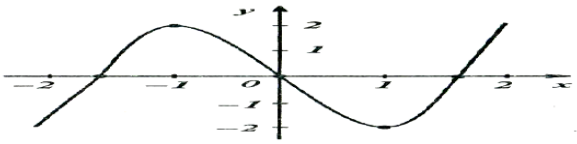
   Функция вогнута на $[0,+\infty)$, выпукла на $(-\infty,0]$.

   $x=0$ - точка перегиба.

   Составим таблицу:

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	*вогнута*	0	*Выпукла*
		перегиб	

7. Построим график функции:



.

3.Порядок выполнения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

Содержание работы

1.Найдите критические точки функции:

а) $f(x)=x^4-2x^2-3x$ *а)* $f(x)=2+18x^2-x^4$

б) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x+4}$

2.Исследуйте функцию на выпуклость:

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 3$ $\qquad$ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

3.Исследуйте функцию и постройте ее график:

$f(x) = x^3 - 3x^2$

4. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание

4.4 Формулы расчета

4.5 Результат

Практическая работа №7. «Основные методы интегрирования»

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основные методы интегрирования»»

Перечень справочной литературы:

1.Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.

2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.

3.Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов.2010

4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

Краткие теоретические сведения:

Определенный интеграл

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, когда $n \to \infty$ так, что $\alpha \to 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначают следующим образом: $\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$. В этом случае функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a;b] . Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

Основные свойства определенного интеграла

$1^0 \int_a^b f(x)dx = 0$; $\quad 2^0 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; где a, b, c любые числа.

$4^0 \int_a^u kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; $5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = *F(x)* является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi$(t)

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d; \beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Пример. Вычислить $\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{2} dx$.

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dx = \sin\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = -2\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -2\cos\frac{x}{2}e^x \Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^x \cos\frac{x}{2}dx =$$

Решение:

$$= \begin{vmatrix} u = e^x & dx = \cos\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = 2\sin\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -2\cos\frac{\pi}{2}e^{\pi} + 2\cos\frac{0}{2}e^0 + 2\left(2e^x \sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx\right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 4e^0\sin\frac{0}{2} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 2 + 4e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$

Неопределенный интеграл

Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0 (\int f(x)dx)' = f(x)$; $2^0\, d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$3^0 \int dx(x) = F(x) + c$; $4^0 \int k f(x)dx = k\int (x)dx$;

$5^0 \int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов.

$1.\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1)$, в частности, $\int du = u + c$;
$2.\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$; $3.\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$; $4.\int e^u du = e^u + c$; $5.\int \sin u du = -\cos u + c$;
$6.\int \cos u du = \sin u + c$; $7.\int tgu du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$; $8.\int ctgu du = \ln\lvert\sin u\rvert + c$;
$9.\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$; $10.\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$; $11.\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + c$;
$12.\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert + c$; $13.\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$;
$14.\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\rvert + c$; $15.\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + c$;
$16.\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+u}{a-u}\right\rvert + c$; $17\int \sqrt{a^2 - u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c$;
$18.\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{u}{2} \times \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c.$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к

одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $\int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают $\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

13.3. Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u d\upsilon = u \times \upsilon - \int \upsilon du}$$

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

<u>Содержание работы</u>

№ 1. Вычислить определенный интегралы:

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$	1. $\int_1^2 e^x dx$
2. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$	2. $\int_0^2 \left(3x^2 - 1\right)dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$	3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

№2. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$	1. $\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})dx$
2. $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{x^3})dx$	2. $\int (\sin x + 5\cos x)dx$
3. $\int (2^x + 3^x)dx$	3. $\int e^x (1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$
4. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	4. $\int ctg^2 x dx$

№3. Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int \cos 5x dx$	1. $\int \sin 7x dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$	2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$	3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$
4. $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx$	4. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

№ 4. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x dx$	1. $\int (x^2 + 3x + 2)\ln x dx$
2. $\int x \ln x dx$	2. $\int x \ln(3x+2) dx$
3. $\int x e^{-x} dx$	3. $\int x e^{5x} dx$
4. $\int \arcsin x dx$	4. $\int \cos(\ln x) dx$

4. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание

4.4 Формулы расчета

4.5 Результат

Практическая работа №8 «Решение прикладных задач»

<u>Цель работы:</u>

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Решение прикладных задач (Приложения определенного интеграла)»

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.

2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.

3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: уч.для вузов 2010

4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

Краткие теоретические сведения:

Вычисление площади плоской фигуры

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью O_x и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$ (рис. 1)

Так дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т. е. $dS = f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси O_y так, что $c \le y \le d$, $x = \varphi(y) \ge 0$ (рис. 2), то дифференциал переменной площади S равен $dS = f(y)dy$, откуда

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy. \quad (2)$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью O_x и прямыми x=a и x=b, лежит под осью O_x (рис. 3), площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad (3)$$

Если фигура ограниченная кривой $f(y)$, осью O_x и прямыми x=a и x=b, расположена по обе стороны от оси O_x (рис. 4), то

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b |f(x)|dx.$$

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми x=a и x=b, где $a \le x \le b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 5). Тогда ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (5)$$

<u>Пример</u>. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$ и $x = 2$.

<u>Решение</u>. Выполним построение фигуры. Строим прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам A(4;0) и B(0;2) (рис.6). Выразив y через x, получим $y = -0{,}5x + 2$. По формуле (1), где $f(x) = -0{,}5x + 2$, $a = -3$ и $b = 2$, находим

$$S = \int_{-3}^{2} (-0{,}5x + 2)dx = \left[-0{,}25x^2 + 2x\right]_{-3}^{2} = 11{,}25 \text{ (в. ед.)}$$

Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \ge 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \quad (6)$$

Пример. Скорость движения точки изменяется по закону $v=\left(3t^2+2t+1\right)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.
Решение. Согласно условию, $f(t)=3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле (6) находим

$$S=\int_0^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left[t^3+t^2+t\right]_0^{10}=10^3+10^2+10=1110 \text{ (м)}.$$

Вычисление работы силы
Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси O_x материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находится по формуле

$$A=\int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F=kx$, (8)
где F - сила, Н; x - абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k - коэффициент пропорциональности, Н/м.
Пример. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.
Решение. Так как, $x=0{,}01$ м при $F=10$ Н, то, подставляя эти значения в равенство (8), получим $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F=1000x$, т. е. $f(x)=1000x$. Искомую работу найдем по формуле (7), полагая $a=0$, $b=0{,}04$:

$$A=\int_0^{0,04}1000xdx=500x^2\,|_0^{0,04}=0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

Порядок проведения работы:
Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

Содержание работы

1.Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: x-2y+4=0, x+y-5=0, y=0.
2.При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?
3.Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.
4.Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20м и высотой 5м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

Содержание отчета
Отчет должен содержать:
4.1 Название работы
4.2 Цель работы

4.3 Задание
4.4 Формулы расчета
4.5 Результат

Практическая работа №9.
«Исследование сходимости знакочередующихся рядов. Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость»
Цель работы:
Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Исследование сходимости знакочередующихся рядов. Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость»
Перечень справочной литературы :
1.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов 2-е изд., перераб. И доп. – М.:ЮНИТИ, 2002
2.Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. Пособие.-2-е изд., перераб. И доп. – М.: Наука, 1989
3.Богомолов, Н.В Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие / Н.В.Богомолов – 10-е изд. , стер.-м.: Высш. Шк., 2009 – 495с
4. Дадаян, А.А Математика [Текст]: учебник / А.А.Дадян – М.: Форум: Инфра- М, 2005 – 552 с. – (Професс. образование)

<u>Краткие теоретические сведения:</u>
Определение: если $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n$, ...-бесконечная числовая последовательность, то выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n +..$ называется числовым рядом.
Определение: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся.
Необходимый признак сходимости: если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не существует или не равно нулю, то ряд расходится.
Достаточный признак сходимости (Признак Даламбера): Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
1) если $q < 1$ – ряд сходится
2) если $q > 1$ – ряд расходится
3) если $q = 1$ – вопрос о сходимости или расходимости не решается.
<u>Задача.</u> Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$на сходимость по признаку Даламбера.
<u>Решение.</u> Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Таким образом, ряд сходится.

Определение: числовой ряд $u_1+u_2+\cdots+u_n+$..называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Определение: числовой ряд $u_1+u_2+\cdots+u_n+$.. называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n стремится к нулю при$n\to\infty$, то ряд сходится.

Определение: знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

<u>Задача.</u> Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

<u>Решение.</u> 1) члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является гармоническим рядом, который, как известно, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

2) Используя признак Лейбница, получим $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\cdots$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

Это геометрический ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n(q=\frac{1}{2})$, который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

Содержание работы

Задача 1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{4n-1}$

Задача 2.Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{1/4}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot 3^n}$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовые ряды по признаку Даламбера

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{3})^n}$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание

4.4 Формулы расчета

4.5 Результат

Практическая работа №10.

«Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд. Ряды Фурье»

Цель работы

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд. Ряды Фурье»

Перечень справочной литературы :

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.

2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.

3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: уч.для вузов 2010

4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

<u>Краткие теоретические сведения:</u>

Определение: рядом Тейлора для функции$f(x)$называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

Определение:Если $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, называемый рядом Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Для разложения функции$f(x)$в ряд Маклорена необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=0$,т.е. $f(0), f'(0), f''(0), \dots f^{(n)}(0)$;

2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу;
3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| (a_n \neq 0, n = 1,2,3, \dots)$

Для разложения функции$f(x)$в ряд Тейлора необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке$x = a$,т.е. $f(a), f'(a), f''(a), \dots f^{(n)}(a)$;
2) составить ряд Тейлора, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу;
3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| (a_n \neq 0, n = 1,2,3, \dots)$

<u>Задача.</u> Разложить в ряд Маклорена функцию$f(x) = e^x$.

<u>Решение.</u> Вычислим значения функции и ее производных при $x = 0$; имеем $f(x) = e^x, f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x; f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$Подставив эти значения в формулу, получим разложение функции $f(x) = e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Промежуток сходимости найдем по формуле:

$$a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!};\ \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x) = e^x$ при любых значениях x, так как в любом промежутке функция $f(x) = e^x$ и ее производные по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом.

Определение: Ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

называется рядом Фурье функции$f(x)$.

Замечание: функция$f(x)$с областью определения $-\pi \leq x \leq \pi$может быть разложена в ряд Фурье, сходящихся к данной функции $f(x)$ при определенных условиях, называемых условиями Дирихле:

1) функция должна быть непрерывной в промежутке $-\pi \le x \le \pi$ или может иметь в указанном промежутке конечное число разрывов Ірода.
2)функция должна иметь конечное число экстремумов или не иметь их совсем.

Задача. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, при\ -\pi < x < 0 \\ 1,\ при\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Решение. Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right] = -1 \cdot \frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1 - \cos \pi n) = \begin{cases} 0, k - четное \\ \frac{4}{\pi n}, k - нечетное \end{cases}$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \cdots\right]$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

Содержание работы

Вариант 1.

Задача 1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$.

Задача 2. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos\frac{x}{3}$.

Задача 3. Разложите в ряд Тейлора по степеням $x + 3$функцию $f(x) = e^{-2x}$

Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x\ при - \pi \le x \le \pi$

Вариант 2.

Задача 1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Задача 2. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(1 + 5x)$.

Задача 3. Разложите в ряд Тейлора по степеням $x - \frac{\pi}{3}$функцию $f(x) = \cos x$

Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2 при - \pi \le x \le \pi$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4.1 Название работы

4.2 Цель работы

4.3 Задание
4.4 Формулы расчета
4.5 Результат

Список литературы:

1.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов 2-е изд., перераб. И доп. – М.:ЮНИТИ, 2002

2.Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб. Пособие.-2-е изд., перераб. И доп. – М.: Наука, 1989

3.Богомолов, Н.В Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие / Н.В.Богомолов – 10-е изд. , стер.-м.: Высш. Шк., 2009 – 495с

4. Дадаян, А.А Математика [Текст]: учебник / А.А.Дадян – М.: Форум: Инфра- М, 2005 – 552 с. – (Профессиональное образование)